Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 1999
Übungsblatt 10
9. Juli 1999

Diskrete Strukturen II

(Abgabetermin: **Freitag, 16. Juli 1999**, in der Vorlesung)

Aufgabe 1

(Fortsetzung der letzten Aufgabe auf Blatt 9.)
Betrachten Sie wieder die Zufallspaziergänger X und $X^{(m)}$ auf $\mathbb{Z}$. Beide starten im Zustand 0, gehen mit WS 1/2 nach links bzw. rechts. Falls aber $X^{(m)}$ die Menge $\{-m, m\}$ trifft, bleibt er für immer dort gefangen.
Zeigen Sie, daß der Zufallsspaziergänger X mit WS 1 wieder zu seinem Startpunkt i zurückkehrt.
[Beweisidee: Die Menge aller Pfade (von X), die zur 0 zurückkehren, enthält für jedes $m > 0$ insbesonder alle Pfade von $X^{(m)}$, die zur 0 zurückkehren. Letztere Menge hat aber für jedes m sowohl bezüglich X als auch bezüglich $X^{(m)}$ die gleiche Wahrscheinlichkeit ...]

Aufgabe 2

Wir betrachten einen Zufallsspaziergänger X auf $S := \mathbb{Z}_n = \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$. Er bleibe mit WS 1/2 stehen, und gehe mit WS jeweils 1/4 einen Schritt nach links bzw. nach rechts.

- Schreiben Sie die Übergangsmatrix $(P_{i,j})$ für $n = 4$ auf.
- Zeigen Sie, daß diese Markovkette irreduzibel und aperiodisch ist.
- Raten Sie, was die (eindeutige, wie wir wissen) invariante Verteilung sein könnte, und beweisen Sie, daß Sie recht haben.

Berkung: Wenn eine endliche irreduzible und aperiodische Markovkette für alle Zustandspaare (i, j) das sogenannte *Massenwirkungsgesetz*

$$\pi_i P_{i,j} = \pi_j P_{j,i} \tag{1}$$

erfüllt, dann ist der Vektor (π_i) (bis auf Normierung) gleich der (eindeutig bestimmten) invarianten Verteilung. Das Massenwirkunggesetz (auf Englisch *Law of Detailed Balance*) beschreibt in der Chemie das Verhalten eine Systems im thermodynamischen Gleichgewicht. Wenn durchschnittlich proportional zu π_i Moleküle im Zustand i sind, bewegen sich pro Zeiteinheit proportional zu $\pi_i P_{i,j}$ viele Moleküle vom Zustand i in den Zustand j, und umgekehrt. Im Gleichgewicht sollen sich diese Bewegungen ausgleichen, dieser Annahme entspricht Gleichung (1).
Zusatzaufgabe: Beweisen Sie mit Hilfe des Massenwirkungsgesetzes, daß ein symmetrische ($P_{i,j} \equiv P_{j,i}$), endliche, irreduzible und aperiodische Markovkette die Gleichverteilung auf ihrem Zustandsraum S als invariante Verteilung hat.

b.w.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Markovkette aus der letzen Aufgabe mit Startzustand i. Machen Sie sich mit der Matrixmultiplikation in `maple` vertraut, oder schreiben Sie ein eigenes Programm, um die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten, also die Wahrscheinlichkeitsvektoren $q_t = (q_t^{(0)}, q_t^{(1)}, \dots q_t^{(n-1)})$, für verschiedene Zeitpunkte t zu berechnen.
Bestimmen Sie, wie lange man braucht, bis man in etwa die invariante Verteilung erreicht hat, für $n = 5, 10, 20$. Dokumentieren Sie ihre Arbeit, vorzugsweise, indem Sie ihre Ergebnisse graphisch aufbereiten.