Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 1999
Übungsblatt 11
16. Juli 1999

Diskrete Strukturen II

(Abgabetermin: **Freitag, 23. Juli 1999**, in der Vorlesung)

Aufgabe 1

Modellieren Sie einen Supermarkt mit zwei Kassen, in dem Leute exponentialverteilt mit Rate λ ankommen, als Birth&Death–Markovkette mit Zustandsraum $\mathbb{N}_0$. Wenn die Kette im Zustand i ist, stehen i Leute an den Kassen an. Wenn mehr als 5 Leute an der Kasse stehen, werden beide Kassen geöffnet, anderenfalls ist nur eine geöffnet. Die Abarbeitungsrate bei einer geöffneten Kasse sei μ[1].
Berechnen Sie die invariante Verteilung π in Abhängigkeit von μ und λ.

Aufgabe 2

Wenn Sie die vorige Aufgabe nicht gelöst haben, rechnen Sie soweit möglich mit einer unbekannten invarianten Verteilung π weiter.

i) Berechnen Sie die erwartete Anzahl von Leuten in der Kasse als Funktion von λ und μ.

ii) Wie lange muß man in Abhängigkeit von λ im Durschnitt an der Kasse warten? Berechnen Sie konkrete Werte speziell für den Dienstag vormittag, wo $\lambda = 0.2$ (Kunden pro Minute), und den Samstag vormittag, wo $\lambda = 1.8$. Nehmen Sie jeweils $\mu = 1$ an.

iii) Was passiert am letzten Samstag vor Weihnachten, wenn $\lambda = 5.1$?

Aufgabe 3

Sie stehen in einem Supermarkt mit 10 Kassen, an denen jeweils 10 Leute anstehen, an einer beliebigen Kasse an. Die Kassierer arbeiten Kunden mit der Rate $\mu = 1$ ab.

i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß es eine Kasse gibt, deren Schlange schneller abgebaut ist als die Ihre?

ii) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Zeit, die Sie in ihrer Schlange verbringen müssen, bis Sie drankommen.

iii) Geben Sie eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit an, daß Sie in Ihrer Schlange mehr als 5, aber weniger als 15 Zeiteinheiten warten müssen, bis Sie drankommen.

[1] Wenn zwei Kassen mit Raten μ_1 und μ_2 geöffnet sind, dann ist die gesamte Abarbeitungszeit verteilt wie $\min\{X, Y\}$ zweier unabhängiger Zufallvariablen $X \sim \mu_1 e^{-\mu_1 t}$ und $X \sim \mu_2 e^{-\mu_2 t}$.
Es gilt aber $\Pr[\min\{X,Y\} \leq t] = \Pr[X \leq t \vee Y \leq t] = 1 - \Pr[X > t \wedge Y > t] = 1 - e^{-\mu_1 t} \cdot e^{-\mu_2 t} = 1 - e^{-(\mu_1+\mu_2)t}$. Also ist $\min\{X,Y\}$ verteilt wie $(\mu_1 + \mu_2)e^{-(\mu_1+\mu_2)}$, die Raten addieren sich einfach.