Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 1999
Übungsblatt 12
27. Juli 1999

Diskrete Strukturen II

Aufgabe 1

Sei eine Stichprobe $\vec{x} = (34, 12, 88, 90, 17, 19)$ gegeben. Nehmen Sie an, daß die zugrungeliegende Zufallsvariable X binomialverteilt ist gemäß $B(\cdot, 100, p)$. Der unbekannte Parameter ist also p. Es ist natürlich genauso gut, den Erwartungswert μ zu schätzen, denn es gilt immer $\mu = 100 \cdot p.$.

1. Berechnen Sie das Stichprobenmittel $\bar{x} := \sum_{i=1}^{6} x_i$. Welchen Wert liefert der Maximum–Likelihood–Ansatz?

2. Berechnen Sie die Stichprobenvarianz $s^2 := \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{6}(x_i - \bar{x})^2$, und vergleichen Sie mit dem Wert $100 \cdot (\bar{x}/100)(1 - \bar{x}/100)$, der Varianz einer Binomialverteilung mit Parametern 100 und $\bar{x}/100$.

3. Äußern Sie eine Vermutung, warum diese Werte so stark unterschiedlich sind, wo sie doch eigentlich eine unbekannte aber gleichwohl feste Größe μ annähern sollten (Wie haben wir die Stichprobe vermutlich erzeugt? Ist das eine 'typische' Stichprobe gewesen?).

Aufgabe 2

Vorbemerkung i): Wenn wir die (invertierbare!) Verteilungsfunktion Φ_X einer ZV X kennen und beliebig viele unabhängige Stichproben gemäß einer ZV Y zur Verfügung haben, die gleichverteilt auf $[0, 1]$ ist (Zufallsgenerator), dann können wir beliebig viele unabhängige Stichproben gemäß X erzeugen, weil wegen

$$\Pr[\Phi_X(X) \le t] = \Pr\left[X \le \Phi_X^{-1}(t)\right] \stackrel{\text{Def. von } \Phi_X}{=} \Phi_X(\Phi_X^{-1}(t)) = t = \Phi_Z(t)$$

X verteilt ist wie $\Phi_X^{-1}(Z)$.

Vorbemerkung ii): Probieren Sie in `maple` folgende Kommandos aus:

```
> rnum:=rand(0..100000000)/100000000;evalf(rnum());
> L:=['fsolve(1/2*erf(1/2*t*sqrt(2))+1/2 =rnum(),t)-mu'$i=1..50];
> evalf(add(op(x,L)-mu,x=1..50)/sqrt(50));
> fsolve(1/2*erf(1/2*t*sqrt(2))+1/2 =1-alpha/2,t);
```

Ersetzen Sie '`mu`' und '`alpha`' durch angemessene Zahlenwerte.

1. Erzeugen Sie zwei Stichproben der Länge 50, einmal gemäß $\phi(\cdot, 0.1, 1)$ und einmal gemäß $\phi(\cdot, 0.45, 1)$. Führen Sie auf diesen Stichproben jeweils den Gauß–Test durch mit den Hypothesen $\Theta_0 = \{0\}$ und $\Theta_1 = \{0.5\}$, also '$\mu = 0$' bzw. '$\mu = 0.5$'. Wählen Sie $\alpha = 0.01$.

2. Sei Θ_0 die Nullhypothese und Θ_1 die (echte) Alternative. Was ist der Fehler erster und zweiter Art?