Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 1999
Übungsblatt 4
28. Mai 1999

Diskrete Strukturen II

(Abgabetermin: **Freitag, 4. Juni 1999**, in der Vorlesung)

Aufgabe 1

Betrachten Sie nochmals das Geburtstagsproblem.

1. Was ist der Erwartungswert der Anzahl X von Paaren (von Gästen), die am selben Tag Geburtstag haben in Abhängigkeit von n, der Anzahl von Personen?
2. Kann man die Varianz dieser Größe leicht ausrechen? Begründen Sie Ihre Antwort.
3. Berechnen Sie mittels der Markov–Ungleichung eine obere Schranke (abhängig von n) für die Wahrscheinlichkeit, daß es mindestens fünf solcher Paare gibt.

Aufgabe 2

Seien nun X und Y Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{Z}$ und jeweils endlicher Varianz.

1. Zeigen Sie, daß gilt $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X]) \cdot (Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$.
2. Die rechte Seite der obigen Gleichung heißt auch die *Kovarianz* $Cov(X, Y)$ *von* X *und* Y. Zeigen Sie, daß die Kovarianz 0 ist, wenn X und Y (paarweise) unabhängig sind.
3. Zeigen Sie, daß $\mathrm{Cov}(X, X) = Var(X)$, und daß $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$. Seien nun X und Y nicht mehr unbedingt unabhängig, aber die Zahlenwerte $\mathrm{Var}[X], \mathrm{Var}[Y]$ und $\mathrm{Cov}(X, Y)$ bekannt. Berechnen Sie damit $\mathrm{Var}[X + Y]$.

Aufgabe 3

Ein zufälliger Graph entstehe auf die folgende Weise. Im vollständigen Graphen auf n Knoten werde jede Kante betrachtet und unabhängig von allen anderen Kanten mit WS p markiert. Die markierten Kanten bilden dann den gesuchten Zufallsgraphen. Man schreibt oft $G \in \mathcal{G}(n, p)$, wenn man einen so erzeugten Zufallsgraphen meint.

1. Berechnen Sie die erwartete Anzahl von Knoten, die genau 3 Nachbarn im Zufallsgraph haben.
2. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Anzahl Y von Kanten, die in dem Zufallsgraphen vorkommen.
3. Berechnen Sie mittels der Ungleichung von Chebyshev eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, daß die Anzahl von Kanten um mehr als 5% vom Erwartungswert abweicht.