Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 1999
Übungsblatt 5
4. Juni 1999

Diskrete Strukturen II

(Abgabetermin: **Freitag, 11. Juni 1999**, in der Vorlesung)

Aufgabe 1

Sei $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$. Zeigen Sie, daß

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{ne}{k}\right)^k \tag{1}$$

gilt. Dabei darf die folgende Version der Stirlingschen Formel benutzt werden:

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12(n-1)}} \qquad \text{für } n \geq 2. \tag{2}$$

Aufgabe 2

Betrachten Sie einen Parallelrechner mit n Prozessoren und n Speicherzellen. In jedem Zeitschritt sende jeder Prozessor eine Anfrage unabhängig und gleichverteilt an eine Speicherzelle. Jede Speicherzelle kann eine beschränkte Anzahl k Anfragen gleichzeitig bedienen. Falls eine Speicherzelle von mehr als k Prozessoren gleichzeitig angefragt wird, so wird keine der Anfragen beantwortet.
Bestimmen Sie die erwartete Anzahl der Prozessoren (pro Zeitschritt), die ihre Anfrage beantwortet bekommen, für a) $k = 1$, b) $k = 2$.

Aufgabe 3

1. Zeigen Sie, daß die Markovungleichung in folgendem Sinne scharf ist. Geben Sie für jedes $t \in \mathbb{N}$ jeweils eine Verteilung auf $\mathbb{N}_0$ an, so daß für eine Zufallsvariable X mit dieser Verteilung gilt:
$$\Pr\left[X \geq t\right] = \frac{\mathbb{E}[X]}{t}.$$

2. Sei $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, wobei die X_i unabhängige 0/1 ZV mit Erfolgswahrscheinlichkeit p_i sind. Für die p_i's soll die Nebenbedingung $\sum_{i=1}^{n} p_i = np\,[= \mathbb{E}[X]]$ gelten, ansonsten sind sie beliebige WS.

   Zeigen Sie, daß die Varianz von X maximal ist, wenn alle p_i's gleich sind.