Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 1999
Übungsblatt 8
25. Juni 1999

Diskrete Strukturen II

(Abgabetermin: **Freitag, 2. Juli 1999**, in der Vorlesung)

Aufgabe 1

Eine Zufallsvariable X heißt log–normalverteilt mit Parametern $\sigma \in \mathbb{R}^+$ und $\mu \in \mathbb{R}$, wenn sie folgende Dichte hat:

$$f_X(x) = f(x;\ \mu, \sigma^2) := \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-1/(2\sigma^2)(\ln(x)-\mu)^2} & x > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

1. Zeigen Sie, daß $Y := \ln X$ normalverteilt ist gemäß $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wenn X log–normalverteilt wie oben ist. Das erklärt den Namen 'log–normalverteilt'.

2. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit endlichem Erwartungswert und Varianz. Beweisen Sie mit a) und dem zentralen Grenzwertsatz, daß für $n \to \infty$ das Produkt $\prod_{i=1}^n X_i$ log–normalverteilt ist.

Aufgabe 2

Das k–te Moment einer Zufallsvariable X mit Dichte f_X ist definiert als

$$\mathbb{E}\left[X^k\right] = \int_{\mathbb{R}} x^k f_X(x) dx.$$

1. Berechnen Sie das dritte und das vierte Moment der Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

2. Berechnen Sie induktiv alle Momente der Standardnormalverteilung (per Induktion, für gerade k).

Aufgabe 3

Sei $X^{(n)} = \sum_{i=1}^n X_i$ wie üblich die Summe von unabhängigen 0/1 Zufallsvariablen X_i mit Erfolgswahrscheinlichkeit p. Diese ist gemäß $B(\cdot, n, p)$ verteilt. Illustrieren Sie den zentralen Grenzwertsatz, indem Sie die Verteilungsfunktionen der normierten Zufallsvariablen

$$Y^{(n)} := (X^{(n)} - \mathbb{E}\left[X^{(n)}\right]) / \sqrt{\mathrm{Var}\left[X^{(n)}\right]}$$

für $n = 5, 10, 30, 50$ zusammen mit der Verteilungfunktion $\Phi(\cdot, 0, 1)$ der Standardnormalverteilung plotten. Tip: Sie können Φ in `maple` mit Hilfe der *Error Function erf* berechnen ($\Phi(x, 0, 1) = 1/2\, erf(1/2\, x\sqrt{2}) + 1/2$).