Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 1999
Übungsblatt 9
2. Juli 1999

Diskrete Strukturen II

(Abgabetermin: **Freitag, 9. Juli 1999**, in der Vorlesung)

Aufgabe 1

Sei $X = \sum_{i=1}^{2000} X_i$ die Summe aller Augenzahlen, wenn man 2000 mal mit dem üblichen sechsseitigen idealisierten Würfel würfelt.

i) Berechnen sie näherungsweise die WS, daß die Gesamtaugenzahl X zwischen 7000 und 8000 liegt.

ii) Wie groß muß man Δx wählen, daß $X \in [7000 - \Delta x, 7000 + \Delta x]$ mit WS (ungefähr) 1/2?

Nutzen Sie den zentralen Grenzwertsatz, daß also die Verteilungsfunktion der normierten Zufallsvariablen

$$Y := (X - \mathbb{E}[X])/\sqrt{\mathrm{Var}\,[X]}$$

sehr gut durch die Verteilungsfunktion $\Phi(\cdot, 0, 1)$ der Standardnormalverteilung angenähert wird. Sie können Φ in Tabellen nachschlagen, oder in `maple` mit Hilfe der *Error Function* erf berechnen ($\Phi(x, 0, 1) = 1/2\, erf(1/2\, x\sqrt{2}) + 1/2$).

Aufgabe 2

Zur Zeit $t = 0$ seien N Moleküle mit Halbwertzeit $T_{1/2} > 4000$ Tage gegeben. Ein Geigerzähler mißt einen Tag lang alle Zerfälle, die Anzahl werde mit X bezeichnet.

a) Berechnen Sie die mittlere Lebensdauer τ (nach dieser Zeit sind noch $1/e$ der Moleküle übrig), und schreiben Sie die Dichte $f_X(t)$ auf, nach der die Lebensdauer eines Moleküls verteilt ist. Dabei können Sie annehmen, daß diese Dichte eine Exponentialverteilung ist.

b) Wie ist die exakte Wahrscheinlichkeit, daß keines der N Moleküle innerhalb des ersten Tages zerfällt?

c) Wie ist die Wahrscheinlichkeit, daß genau eines der Moleküle am ersten Tag zerfällt? Benutzen sie zunächst die Näherung $1 - e^{-\alpha} \simeq \alpha$ für $\alpha << 1$. Wie groß ist die Abweichung vom exakten Wert höchstens?

d) Ausgehend von b) und c), äußern Sie eine intelligente Vermutung, wie die Anzahl X der Zerfälle am ersten Tag annähernd verteilt ist, wenn die Lebensdauer hinreichend groß gegenüber der Meßzeit, und auch die Anzahl der Moleküle hinreichend groß ist.

b.w.

Aufgabe 3

Betrachten Sie wie in der dritten Aufgabe von Blatt 3 einen Zufallsspaziergänger (X_t) auf $\mathbb{Z}$, der mit WS 1/2 nach links, anderenfalls nach rechts geht, und seinen faulen Bruder (Y_t), der mit WS 1/2 sitzenbleibt und mit WS jeweils 1/4 nach links bzw. nach rechts geht. Beide starten zur Zeit $t = 0$ an der Stelle $x = 2$.

a) Berechnen Sie die Aufenthaltsverteilung (den Wahrscheinlichkeitsvektor) von X und Y zur Zeit $t = 2$.

b) Welche der beiden Markovketten ist aperiodisch, welche periodisch (Begründung)?

c) Jetzt graben wir Gruben an den Stellen $\pm m$, wo X für immer gefangen gehalten wird, die korrespondierende Markovkette heiße $X^{(m)}$. Zeigen Sie, daß $X^{(m)}$ von der Stelle $-m \leq i \leq m$ mit Wahrscheinlichkeit $f_{i,0} = \frac{m-|i|}{m}$ zur Null zurückkehrt, indem Sie beispielsweise eine Rekursionsgleichung für $f_{i,0}$ aufstellen und zeigen, daß die obige Wahl diese löst. Wie sieht die entsprechende Größe für $Y^{(m)}$ aus? Diskutieren Sie kurz die intuitive Bedeutung Ihrer Ergebnisse.