Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 1999
Übungsblatt 10
15. Juli 1999

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen II

(Abgabetermin: Donnerstag, den 22. Juli 1999, in der Vorlesung)

Aufgabe 1

Zeigen Sie folgende Form des Dualitätssatzes für die Lineare Programmierung:

$$\sup\{cx;\quad Ax \leq b\} = \inf\{yb;\quad y \geq 0, yA = c\}$$

unter der Voraussetzung, daß mindestens eine der beiden Mengen nicht leer ist. (Es sei $\sup\emptyset = -\infty$ und $\inf\emptyset = +\infty$)

Aufgabe 2

Seien

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & K \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, (d, e, f)$$

eine Matrix, ein Spalten- bzw. ein Zeilenvektor, mit Matrizen $A, \ldots, K$, Spaltenvektoren a, b, c und Zeilenvektoren d, e, f. Dann gilt folgende allgemeine Form des Dualitätssatzes:

$$\begin{aligned} &\max\{dx + ey + fz;\quad x \geq 0, z \leq 0, Ax + By + Cz \leq a, Dx + Ey + Fz = b, \\ &\qquad\qquad Gx + Hy + Kz \geq c\} \\ &= \min\{au + bv + cw;\quad u \geq 0, w \leq 0, uA + vD + wG \geq d, uB + vE + wH = e, \\ &\qquad\qquad uC + vF + wK \leq f\}\,, \end{aligned}$$

vorausgesetzt, daß beide Mengen nicht leer sind.

Aufgabe 3

Gegeben ein System $Ax \leq b$ von linearen Ungleichungen, finden Sie ein lineares Programm, aus dessen optimaler Lösung man ablesen kann, welche der Ungleichungen in $Ax \leq b$ immer mit Gleichheit erfüllt sind.

↷ **Bitte wenden!** ↷

Aufgabe 4

Beweisen Sie das Max-Flow-Min-Cut-Theorem mit dem Dualitätssatz der linearen Programmierung, indem Sie die Berechnung des maximalen Flusses folgendermaßen formulieren:

- Sei $N = (G, c, s, t)$ ein Netzwerk, zu dem wir die gerichtete Kante $e^* = (t, s)$ mit einer sehr großen Kapazität $c(e^*) \geq \sum_{e \in E} c(e)$ hinzufügen.
- Die Unbekannten des linearen Programms sind die Werte x_e, die den Fluß enthalten, der über die Kante $e \in E \cup \{e^*\}$ fließt.
- Die Kirchhoffschen Gesetze zur Flußerhaltung in den Knoten beschreiben wir durch die folgende Inzidenzmatrix $A = (a_{v,e})$ zwischen den Knoten $v \in V$ und den Kanten $e \in E \cup \{e^*\}$:
$$a_{v,e} := \begin{cases} 1, & \text{wenn } e = (u, v) \text{ für ein } u \in V, \\ -1, & \text{wenn } e = (v, w) \text{ für ein } w \in V, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$
- Die Bedingung, daß der Fluß x die Kapazitäten der Kanten nicht überschreiten darf, wird durch die Ungleichung
$$I_m x \leq c$$
erreicht, wobei I_m die $m \times m$ Einheitsmatrix ist.
- Der Wert des Flusses x ist gleich
$$\sum_{e \in E \setminus \{e^*\}} a_{s,e} x_e = - \sum_{e \in \setminus \{e^*\}} a_{t,e} x_e,$$
was die Größe des Flusses über die Kante e^* ist.

Wir erhalten also das folgende primale Programm:

$$\begin{aligned} &\max x_{e^*} \\ &Ax = 0, \quad x \geq 0 \\ &I_m x \leq c. \end{aligned}$$

Wie sieht das duale Programm aus? Beweisen Sie mit dem Dualitätssatz das Max-Flow-Min-Cut-Theorem!