Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 1999
Übungsblatt 3
27. Mai 1999

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen II

(Abgabetermin: **ausnahmsweise** Montag, den 7. Juni 1999, in der Vorlesung)

Aufgabe 1

Sei G ein gewichteter ungerichteter Graph. Zeigen Sie:
Sei M ein Matching in G mit k Kanten und unter all solchen Matchings eines mit maximalem Gewicht (ein maximales k-Matching). Sei weiter k kleiner als die maximale Größe von Matchings in G. Dann gibt es ein maximales $(k+1)$-Matching, das sich durch Augmentieren entlang eines schwersten (bzgl. der alternierenden Summe) augmentierenden Pfades ergibt.

Aufgabe 2

(i) Sei G ein ungerichteter bipartiter Graph mit reellen Kantengewichten. Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus an, der ein Matching maximaler Kardinalität mit maximalem Gewicht bestimmt.
(ii) Sei G ein ungerichteter bipartiter Graph mit reellen Kantengewichten. Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus an, der ein Matching maximalen Gewichts bestimmt.

Aufgabe 3

(i) Für einen Graphen G bezeichne $\mathcal{C}_G$ die Menge seiner (Zusammenhangs-)Komponenten, und $q(G)$ die Anzahl der Komponenten ungerader Ordnung.

> **Satz** (Tutte 1947): Ein Graph $G = (V, E)$ hat genau dann ein perfektes Matching, wenn $q(G \setminus S) \leq |S|$ für alle $S \subseteq V$ gilt.

Zeigen Sie, daß die Bedingung des Satzes notwendig für die Existenz eines perfekten Matchings ist.

↷ **Bitte wenden!** ↷

(ii) Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *faktorkritisch*, wenn $V \neq \emptyset$ und $G \setminus \{v\}$ für jedes $v \in V$ ein perfektes Matching hat. Eine Knotenmenge $S \subseteq V$ heißt *paarbar nach* $G \setminus S$, wenn der Graph H_S, der aus G durch Kontraktion der Komponenten in $\mathcal{C}_{G \setminus S}$ und Löschen aller Kanten innerhalb von S entsteht, ein Matching der Kardinalität $|S|$ enthält.

> **Satz**: Jeder Graph $G = (V, E)$ enthält eine Knotenmenge S mit den folgenden beiden Eigenschaften:
>
> (a) S ist paarbar nach $G \setminus S$.
>
> (b) Jede Komponente von $G \setminus S$ ist faktorkritisch.
>
> Für jedes solche S enthält G genau dann ein perfektes Matching, wenn $|S| = |\mathcal{C}_{G \setminus S}|$ ist.

Zeigen Sie, daß aus diesem Satz der Satz von Tutte folgt.

Aufgabe 4

Implementieren Sie in C++ den in der Vorlesung besprochenen Algorithmus von Hopcroft und Karp, der Matchings maximaler Kardinalität in bipartiten Graphen findet. Nehmen Sie dazu entsprechende Klassen aus LEDA (**L**ibrary of **E**fficient **D**ata types and **A**lgorithms) zu Hilfe.

Installation von LEDA: Sämtliche Informationen zu LEDA können Sie auf der WWW-Seite `www.mpi-sb.mpg.de` finden.
Auf den Rechnern in der sunhalle stehen Ihnen der GNU C++ Compiler sowie LEDA zur Verfügung. LEDA ist dort im Verzeichnis `/usr/wiss/schickin/local/dist/LEDA` installiert. In diesem Verzeichnis liegt auch die komplette Dokumentation in der komprimierten Datei `MANUAL.ps.gz`.
Um mit LEDA arbeiten zu können, müssen die folgenden Umgebungsvariablen gesetzt werden:

```
setenv LEDAROOT /usr/wiss/schickin/local/dist/LEDA
setenv LD_LIBRARY_PATH ${LEDAROOT}:${LD_LIBRARY_PATH}
```

Damit das LEDA-Online-Manual durch den Befehl `xlman` aufgerufen werden kann, muß außerdem noch der Befehl

```
alias xlman ${LEDAROOT}/Manual/cmd/xlman
```

ausgeführt werden. Alternativ kann das Online-Manual auch im WWW angeschaut werden.
LEDA kann ohne Probleme auch auf einem PC unter Linux oder unter Windows installiert werden. Dazu kann die passende Version von der WWW-Seite heruntergeladen werden (kostenlose *research license*).

Verwendung von LEDA: Um ein C++-Programm `foo.cc` mit LEDA und GNU C++ zu übersetzen, reicht der folgende Aufruf:

```
g++ -g -Wall -I$(LEDAROOT)/incl -o foo foo.cc -L$(LEDAROOT) -lW -lP -lG -lL -lX11 -lm
```

Auf der WWW-Seite zu den Übungen befindet sich ein kleines Skript, das aus einer `tcsh`-Shell mit `source LEDA-CONFIG` aufgerufen werden kann und die Umgebungsvariablen setzt. Außerdem finden Sie dort ein `Makefile` und ein kleines Beispielprogramm `foo.cc`.