Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 1999
Übungsblatt 4
7. Juni 1999

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen II

(Abgabetermin: Donnerstag, den 10. Juni 1999, in der Vorlesung)

Aufgabe 1

Sei $G = (U \uplus V, E)$ ein bipartiter Graph mit $|U| = |V| = n$, und sei A die Matrix, deren (i, j)-ter Eintrag gleich $x_{i,j}$ ist, falls es eine Kante von $u_i \in U$ nach $v_j \in V$ gibt, und gleich 0 sonst ist. Die $x_{i,j}$ sind hierbei als Unbestimmte aufzufassen. Zeigen Sie, daß die Determinante von A, als Polynom in den $x_{i,j}$, genau dann von Null verschieden ist, wenn G ein perfektes Matching hat.

Aufgabe 2

Seien M_V und M_U zwei Matchings maximaler Kardinalität in einem bipartiten Graphen $G = (U \uplus V, E)$. Zeigen Sie, daß es ein Matching maximaler Kardinalität in G gibt, das alle Knoten in V matcht, die in M_V gematcht sind, und gleichzeitig alle Knoten in U matcht, die in M_U gematcht sind.

Aufgabe 3

Sei $G = (U \uplus V, E)$ ein knotengewichteter bipartiter Graph, wobei die Knotengewichte in V identisch 0 und die in U nicht-negativ seien. Ein Matching maximalen Gewichts ist dann notwendig ein Matching maximaler Kardinalität in G. Die Knoten in U seien schwach absteigend nach ihrem Gewicht sortiert und es bezeichne U_i die Menge der i schwersten Knoten, $1 \leq i \leq |U|$, bezüglich dieser Ordnung. Zeigen Sie, daß es ein Matching maximalen Gewichts gibt, das jeweils für jedes U_i maximal viele Knoten matcht.