Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 1999
Übungsblatt 5
10. Juni 1999

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen II

(Abgabetermin: Donnerstag, den 17. Juni 1999, in der Vorlesung)

Aufgabe 1

Sei (G, s, t, c) ein Flußproblem mit gerichtetem Netzwerk $G = (V, E)$ und Kapazität $c : E \to \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie, daß sich jeder Fluß $f : E \to \mathbb{R}^+$ für (G, s, t, c) in eine endliche Menge $\mathcal{F}$ von Flüssen entlang einfacher Pfade von s nach t sowie entlang einfacher Kreise in G zerlegen läßt, d.h. $\sum_{f' \in \mathcal{F}} f'(e) = f(e)$ für alle Kanten $e \in E$.

Aufgabe 2

Sei $G = (V, W, E)$ ein bipartites Netzwerk mit $|V| = n_1$, $|W| = n_2$. G heißt *unbalanziert*, falls $n_1 \ll n_2$, also n_1 sehr viel kleiner ist als n_2. Zeigen Sie, daß sich die Laufzeit des MPM-Flußalgorithmus für unbalanzierte Netzwerke durch $O(n_1^2 n_2)$ begrenzen läßt.

Aufgabe 3

Seien u, v zwei Vektoren aus $\mathbb{N}^n$. Zeigen Sie, wie sich das Problem, ob eine 0-1-Matrix (der Dimension $n \times n$) existiert, deren Zeilensummenvektor gleich u und deren Spaltensummenvektor gleich v ist, auf ein maximales Flußproblem reduzieren läßt. Welche Bedingungen ergeben sich für die Existenz einer solchen Matrix etwa aus dem min-cut-max-flow Satz? Sind diese Bedingungen hinreichend?

Aufgabe 4

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche sind falsch? Rechtfertigen Sie Ihre Antworten, indem Sie entweder einen Beweis geben oder aber ein Gegenbeispiel konstruieren.

1. Ist f ein maximaler Fluß, so gilt entweder $f(e) = 0$ oder $f(e) = c(e)$ für jede Kante $e \in E$ eines Netzwerkes $G = (V, E)$.

2. Jedes Netzwerk besitzt einen maximalen Fluß f, für den entweder $f(e) = 0$ oder $f(e) = c(e)$ für jede Kante $e \in E$ gilt.

↷ **Bitte wenden!** ↷

3. Wenn alle Kanten eines Netzwerkes paarweise verschiedene Kapazitäten haben, so gibt es einen eindeutig bestimmten minimalen Schnitt.

4. Wenn man in einem Netzwerk jede gerichtete Kante durch eine ungerichtete Kante ersetzt, so bleibt der Wert eines maximalen Flusses unverändert.

5. Wenn man jede Kantenkapazität mit einer positiven Zahl λ multipliziert, so bleibt die Menge der minimalen Schnitte unverändert.

6. Wenn man zu jeder Kantenkapazität eine positive Zahl λ addiert, so bleibt der Wert eines minimalen Schnittes unverändert.