Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 1999
Übungsblatt 6
21. Juni 1999

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen II

(Abgabetermin: Donnerstag, den 24. Juni 1999, in der Vorlesung)

Aufgabe 1

Sei $G = (V, E)$ ein Netzwerk mit Kapazitätsfunktion $c : E \to \mathbb{R}^+$, Flußfunktion $f : E \to \mathbb{R}^+$ und unterer Schranke für den Fluß $b : E \to \mathbb{R}^+$. Die Kapazität eines Schnittes $(S, \bar{S})$ von G sei definiert als

$$C_{S,\bar{S}} := \sum_{e \in E_{S,\bar{S}}} c(e) - \sum_{e \in E_{\bar{S},S}} b(e).$$

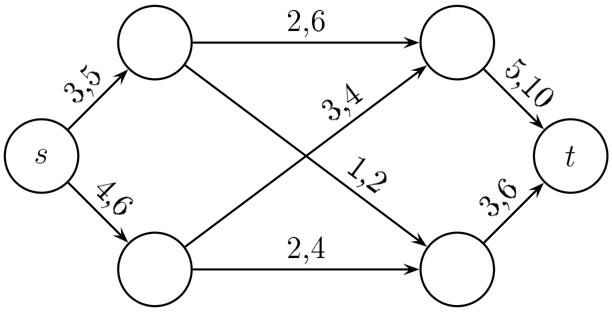
Zeigen Sie, daß mit dieser Definition das "Max-Flow-Min-Cut" Theorem gilt.

Aufgabe 2

Sei (G, s, t, b, c) ein Flußproplem mit gerichtetem Netzwerk $G = (V, E)$, Kapazität $c : E \to \mathbb{R}^+$ und unterer Kapazitätsschranke $b : E \to \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie: für (G, s, t, b, c) existiert genau dann *kein* legaler Fluß, wenn es eine Teilmenge $U \subseteq V - \{s, t\}$ gibt, so daß $\sum_{e \in E_{\bar{U},U}} c(e) < \sum_{e \in E_{U,\bar{U}}} b(e)$ oder $\sum_{e \in E_{U,\bar{U}}} c(e) < \sum_{e \in E_{\bar{U},U}} b(e)$.

Aufgabe 3

Sei das folgende Netzwerk gegeben:



Die an den Kanten angegebenen Zahlen stellen die Kapazitätsschranken b und c dar.

1. Bestimmen Sie den maximalen und den minimalen Fluß von s nach t.

2. Ändern Sie die Kapazität der oberen Kante nach t von 5,10 zu 9,12. Gibt es nun noch einen legalen Fluß? Wenn ja, bestimmen Sie einen, wenn nein, bestimmen Sie eine Teilmenge der Knoten gemäß der vorhergehenden Aufgabe.

Bitte wenden!

Aufgabe 4

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Kantenmenge T heißt *u-v-Kantenseparator*, wenn jeder Pfad in G von u nach v mindestens eine Kante in T benützt. Sei $M(u, v)$ die minimale Kardinalität eines u-v-Kantenseparators. Sei weiterhin $p(u, v)$ die maximale Anzahl kantendisjunkter Pfade, die u und v verbinden. Zeigen Sie durch Reduktion auf ein Flußproblem in einem geeignet definierten Hilfsgraphen, daß $M(u, v) = p(u, v)$ ist. Der *Kantenzusammenhang* c von G werde als $c := \min_{u,v \in V} M(u, v)$ definiert. Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus zur Berechnung von c an.