Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen II

(Abgabetermin: Donnerstag, den 1. Juli 1999, in der Vorlesung)

Aufgabe 1

Eine Menge von $s-t$-Pfaden heißt *knotendisjunkt*, wenn je zwei der Pfade genau die beiden Knoten s und t gemeinsam haben. Eine Knotenmenge S heißt *$s-t$-trennend* (oder ein *$s-t$-Separator*), wenn jeder $s-t$-Pfad mindestens einen Knoten aus S enthält.
Beweisen Sie den

> *Satz von Menger:* Seien s und t zwei nicht benachbarte Knoten in einem Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl knotendisjunkter $s-t$-Pfade in G gleich der minimalen Kardinalität einer $s-t$-trennenden Knotenmenge.

Hinweis: Konstruieren Sie aus dem Graphen G ein Netzwerk $N = (G', c, s, t)$, indem Sie alle mit s inzidenten Kanten von s weg und alle mit t inzidenten Kanten nach t hin ausrichten. Ersetzen sie jeden Knoten $v \in V$ durch zwei Knoten v^- und v^+ und verbinden Sie diese durch zwei gerichtete Kanten (v^-, v^+) und (v^+, v^-). Ersetzen Sie außerdem jede in v hineinführende Kante durch eine in v^- hineinführende Kante und jede aus v herausführende Kante durch eine aus v^+ herausführende Kante. Wenden Sie auf das so entstandene Netzwerk das Max-Flow-Min-Cut-Theorem an.

Aufgabe 2

Ein Graph G mit mindestens $k+1$ Knoten heißt *k-fach (knoten-)zusammenhängend*, wenn es zwischen je zwei Knoten s und t von G mindestens k knotendisjunkte $s-t$-Pfade gibt. Beweisen Sie den folgenden Satz:

> Sei G ein Graph mit mindestens $k+1$ Knoten, der nicht vollständig ist. Dann ist G k-fach zusammenhängend genau dann, wenn jede trennende Knotenmenge mindestens k Knoten hat.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Menger und beachten Sie, daß für die Richtung „$\Leftarrow$“ auch gezeigt werden muß, daß es auch zwischen zwei *benachbarten* Knoten mindestens k knotendisjunkte Pfade gibt!

↷ **Bitte wenden!** ↷

Aufgabe 3

Beweisen Sie den

> *Satz von Dirac:* Je k Knoten eines k-zusammenhängenden Graphen, $k \geq 2$, liegen auf einem gemeinsamen Kreis.

Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst, daß der Graph, da er mindestens $2-$zusammenhängend ist, einen Kreis C enthalten muß. Wie muß dieser Kreis „erweitert“ werden, wenn er einen der vorgegebenen Knoten nicht enthält? Unterscheiden Sie die Fälle $|C| \leq k$ und $|C| > k$.

Aufgabe 4

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, einfacher und zusammenhängender Graph. Geben Sie eine Spezialisierung des Min-Cut Algorithmus von Stoer und Wagner an, die einen Schnitt minimaler Kardinalität in G berechnet, und zeigen Sie, daß in diesem Fall eine bessere Laufzeit erreicht werden kann.