Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 1999
Übungsblatt 9
8. Juli 1999

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen II

(Abgabetermin: Donnerstag, den 15. Juli 1999, in der Vorlesung)

Aufgabe 1

Sei A eine nichtsinguläre $n \times n$ Matrix.
(i) Zeigen Sie

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left((-1)^{i+j} \det(A_{ji})\right)_{1\leq i,j\leq n},$$

wobei A_{lk} die Matrix ist, die aus A durch Streichen der l-ten Zeile und k-ten Spalte entsteht.
(ii) Beweisen Sie die

Cramersche Regel. Sei $x = (x_1, \dots, x_n)^\top = A^{-1}b$. Dann gilt

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)},$$

wobei A_i aus A entsteht, indem die i-te Spalte durch b ersetzt wird.

Aufgabe 2

Beweisen Sie die Aussage, daß für Elemente aus $\mathbb{Q}$ das Gaußsche Eliminationsverfahren im Bitmodell polynomielle Laufzeit in der Größe der Eingabematrix A hat.

Hinweis: Es ist hauptsächlich zu zeigen, daß die Größe aller während der Rechnung auftretenden Zahlen polynomiell in size(A) beschränkt ist. Sei dazu

$$A_k = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

die Matrix nach dem k-ten Eliminationsschritt. Beweisen Sie zunächst, daß sich $\delta_{i,j}$, der (i,j)-te Eintrag von D, wie folgt darstellen läßt:

$$\delta_{i,j} = \det((A_k)^{1,\dots,k,k+i}_{1,\dots,k,k+j}) / \det((A_k)^{1,\dots,k}_{1,\dots,k}),$$

wobei $M^{i_1,\dots,i_t}_{j_1,\dots,j_t}$ die Untermatrix einer Matrix M bezeichnet, die von den Zeilen $i_1, \dots, i_t$ und den Spalten $j_1, \dots, j_t$ induziert wird.

↷ **Bitte wenden!** ↷

Aufgabe 3

Das *Birkhoff-Polytop*. Sei $\mathfrak{S}_n$ die Menge aller Permutation der ganzen Zahlen von 1 bis n. Jeder Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ können wir eine Matrix $X^\sigma = (x_{ij}^\sigma)_{1 \le i,j \le n}$ zuordnen, deren Einträge folgendermaßen definiert sind

$$x_{ij}^\sigma := \begin{cases} 1, & \text{wenn } \sigma(j) = i, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Matrizen X^σ können als Vektoren in $\mathbb{R}^{n^2}$ aufgefaßt werden, und ihre konvexe Hülle ergibt ein 0/1-Polytop P.

- Zeigen Sie, daß die Ecken des Polytops P den perfekten Matchings im vollständigen bipartiten Graph $K_{n,n}$ entsprechen.
- Zeigen Sie, daß P n^2 Facetten hat.
- Zeigen Sie, daß die Dimension von $P(n)$ gleich $(n-1)^2$ ist.

Aufgabe 4

Sei $P = \{x \mid Ax \le b\}$ ein endliches Polytop. Zeigen Sie, daß es immer eine Ecke x^* in P gibt, so daß

$$c^\top x^* = \max\{c^\top x \mid Ax \le b\}.$$