Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Angelika Steger

SS 1999
Übungsblatt 1
11. Mai 1999

Komplexitätstheorie

Aufgabe 1

Eine Sprache heißt *rekursiv aufzählbar*, wenn sie von einer Turingmaschine akzeptiert wird. Beweisen oder widerlegen Sie die Abgeschlossenheit der Klasse der rekursiv aufzählbaren Sprachen unter den Operationen

- Vereinigung
- Differenzbildung
- Komplementbildung
- Produktbildung
- Homomorphismen
- Kleene'scher Hülle

Aufgabe 2

Welche der folgenden Einschränkungen des in der Vorlesung eingeführten Turingmaschinen-Modells führen zu einer Veränderung der Klasse der entscheidbaren Sprachen? Begründen Sie Ihre Antwort.

- 2-elementige Zustandsmenge
- 1-elementige Zustandsmenge
- k-elementiges Alphabet und m-elementige Zustandsmenge (k, $m \in \mathbb{N}$ fest)

Aufgabe 3

Es werde die Sprache L von einer Turingmaschine T akzeptiert, deren Platzbedarf auf Eingaben der Länge n durch die Funktion $s(n)$ beschränkt sei. Zeigen Sie, daß man für jede fest gewählte (kleine) Konstante $c > 0$ eine Turingmaschine T_c konstruieren kann, die L akzeptiert und einen Platzbedarf von höchstens $c \cdot s(n)$ für Eingaben der Länge n hat.

Aufgabe 4

Eine Boole'sche Formel F über einer Variablenmenge V ist in *konjunktiver Normalform*, wenn sie eine konjunktive Verknüpfung $F = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k$ von

Klauseln ist. Eine *Klausel* C_i ist eine disjunktive Verknüpfung von *Literalen* x_j^i: $C_i = (x_1^i \vee x_2^i \vee \cdots \vee x_{r_i}^i)$, und ein Literal ist eine Variable aus V oder die Negation einer Variablen. Zeigen Sie, daß jede Boole'sche Formel F in eine hinsichtlich ihrer Erfüllbarkeit äquivalente Boole'sche Formel F' in konjunktiver Normalform verwandelt werden kann, die in jeder Klausel nur 3 Literale enthält (d.h. $\forall i : r_i = 3$). Bezeichnen wir mit $|F|$ die Anzahl der Literale in F und analog mit $|F'|$ die Anzahl der Literale in F', so soll gelten: $|F'| \leq p(|F|)$ für ein geeignet gewähltes Polynom p.

Hinweis: Erzeugen Sie aus F zuerst eine Formel F'' in konjunktiver Normalform, in der die Anzahl der Literale pro Klausel nicht durch 3 beschränkt ist. F'' soll genau dann erfüllbar sein, wenn F erfüllbar ist.