Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Angelika Steger

SS 1999
Übungsblatt 2
18. Mai 1999

Komplexitätstheorie

Aufgabe 1

Geben Sie an, ob das Erfüllbarkeitsproblem für Boole'sche Formeln in 3-SAT-Form, $\mathcal{NP}$-vollständig ist, falls man weiß, daß jede Variable höchstens 3-mal auftritt. Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 2

Ist das Problem aus Aufgabe 1 $\mathcal{NP}$-vollständig unter der Zusatzvoraussetzung, daß jede Klausel *genau* 3 Literale enthält? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 3

Das Problem CLIQUE ist wie folgt definiert: "Gegeben ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$, entscheide, ob G einen vollständigen Teilgraphen mit k Knoten (d.h. eine *Clique* der Größe k) enthält." Zeigen Sie, daß CLIQUE $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

Hinweis: Reduzieren Sie 3-SAT auf CLIQUE. Definieren Sie zu einer Formel F einen Graphen G etwa wie folgt: Die Knoten geben an, welche Literale in welcher Klausel auftreten, und die Kanten stellen Vereinbarkeitsbeziehungen zwischen den Knoten dar.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, daß das folgende *Inäquivalenzproblem* $\mathcal{NP}$-vollständig ist: "Gegeben zwei reguläre Ausdrücke α, β, entscheide, ob diese äquivalent sind, d.h. ob gilt: $L(\alpha) = L(\beta)$."

Hinweis: Reduzieren Sie 3-SAT auf das Inäquivalenzproblem. Definieren Sie für eine gegebene Boole'sche Formel F in 3-SAT-Form mit m Klauseln und insgesamt k Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ einen regulären Ausdruck α wie folgt: $\alpha := (\gamma_1|\gamma_1')(\gamma_2|\gamma_2')\cdots(\gamma_k|\gamma_k')$ mit $\gamma_i^{(\prime)} = a_{i,1}a_{i,2}\cdots a_{i,m} \in \{0,1\}^*$ und mit $a_{i,j} = 1 \Leftrightarrow x_i$ (bzw. $\overline{x_i}$) kommt in der j-ten Klausel vor. Jede Variablenbelegung wird durch ein Wort aus $L(\alpha)$ beschrieben. Charakterisieren Sie die Wörter, die erfüllende Belegungen darstellen und definieren Sie β so, daß dieser Ausdruck gerade die erfüllenden Belegungen nicht darstellt. Formulieren Sie damit die Erfüllbarkeit von F als Inäquivalenzproblem.