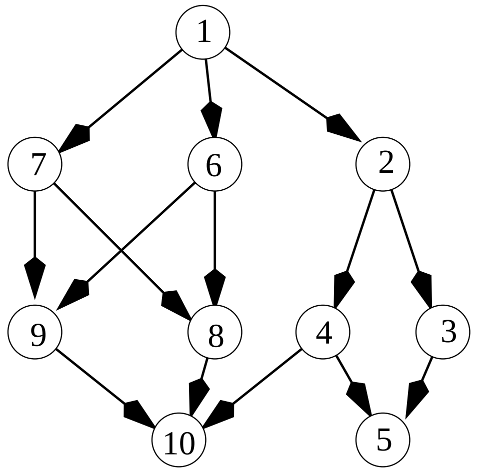
1 Pfade in azyklischen Graphen

Sei wieder ein gerichteter Graph mit Kantengewichten gegeben, der diesmal aber keine Kreise enthält, also azyklisch ist. Für solche Graphen lassen sich kürzeste Pfade einfacher berechnen als in beliebigen gerichteten Graphen. Wir wollen das single-source-Problem für diesen Spezialfall effizient lösen.

Wir nehmen an, daß der Startknoten v der einzige Knoten in G mit Eingangsgrad 0 (d.h. ohne eingehende Kante) ist und daß alle anderen Knoten von v aus erreichbar sind. (Sonst könnten wir einfach den Teilgraph aller von v aus erreichbaren Knoten betrachten.)

Eine hilfreiche Tatsache über azyklische gerichtete Graphen G ist, daß man eine Numerierung bzw. Reihenfolge v_1, v_2, …, v_n der Knoten von G finden kann, so daß alle Kanten des Graphen von einem Knoten v_i zu einem Knoten v_j mit $j > i$ laufen. Eine solche Reihenfolge nennt man auch *topologische Sortierung*. Sie läßt sich mit verschiedenen Methoden effizient in linearer Zeit bestimmen, etwa mit einer modifizierten Tiefensuche, bei der die Nummern in absteigender Reihenfolge am Ende der *visit*-Funktion vergeben werden. In einer topologischen Sortierung unter den obigen Annahmen muß der Startknoten v die Nummer 1 erhalten, da er der einzige Knoten ohne eingehende Kanten ist.

Die folgende Abbildung zeigt ein Beispiel eines azyklischen Graphen, bei dem die Nummern in den Knoten eine gültige topologische Sortierung darstellen:



Um die kürzesten Pfade in G zu berechnen, betrachten wir die Knoten von G in der Reihenfolge der topologischen Sortierung. Sei der aktuell bearbeitete Knoten v_i und seien die Abstände und kürzesten Pfade für $v_1,\ldots,v_{i-1}$ bereits berechnet. Da alle in v_i hineinlaufenden Kanten an einem der bereits erledigten Knoten beginnen, erfüllt der Abstand des aktuellen Knotens v_i von v die folgende Gleichung:

$$\mathtt{dist}[v_i] = \min_{j=1,\ldots,i-1,(v_j,v_i)\in E} \{\mathtt{dist}[v_j] + c(v_j, v_i)\}$$

Wenn der aktuelle Knoten v_i also d eingehende Kanten hat, so kann unter Zuhilfenahme von d bereits berechneten Werten der Wert $\mathtt{dist}[v_i]$ bestimmt werden. Analog lassen sich nebenbei auch die `from`-Werte berechnen.

Mit diesen Hinweisen sollte es nicht schwer sein, ein Programm zu implementieren, das in Zeit $O(|V| + |E|)$ eine topologische Sortierung bestimmt und anschließend in Zeit $O(|V| + |E|)$ die kürzesten Pfade von v zu allen anderen Knoten.

Ebenso ist nicht schwer zu sehen, daß auf dieselbe Art und Weise auch die *längsten* Pfade von v zu allen anderen Knoten berechnet werden können, wenn man in der obigen Formel das Maximum statt des Minimums bildet. Die Berechnung längster Pfade kann also in azyklischen Graphen in linearer Zeit erfolgen, obwohl dieses Problem in beliebigen Graphen $\mathcal{NP}$-hart ist.

Literatur: Volker Turau. Algorithmische Graphentheorie. Addison-Wesley, Bonn, 1996. S. 250–254.