Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Angelika Steger

WS 1999/2000
2. Wiederholungsklausur
4. Juli 2000

Diskrete Strukturen I

Aufgabe 1 (1 Punkt)

Bestimmen Sie die chromatische Zahl und den chromatischen Index des Graphen in der Abbildung 1 und begründen Sie genau Ihre Entscheidung.

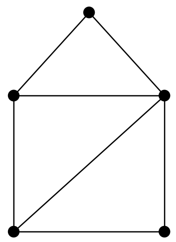

Abbildung 1:

Lösung.

(a) Chromatische Zahl ist 3. Der Graph lässt sich mit 3 Farben färben und andererseits enthält er ein Dreieck, d.h. 3 Farben sind auch notwendig.

(b) Chromatischer Index ist 4. Die Kanten lassen sich mit 4 Farben färben und andererseits gibt es einen Knoten mit Grad 4.

Aufgabe 2 (1 Punkt)

Beschreiben Sie die Elemente der Nebenklasse $6+7\mathbb{Z}$ der Untergruppe $(7\mathbb{Z},+)$ in $(\mathbb{Z},+)$.

Lösung. Die Nebenklasse $6+7\mathbb{Z}$ ist die Menge

$$\{6+7k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -8, -1, 6, 13, \dots\}.$$

Aufgabe 3 (2+4 Punkte)

Bei der Vorrunde einer Europameisterschaft werden die teilnehmenden Mannschaften in Gruppen zu je n Mannschaften aufgeteilt. Jede Mannschaft spielt genau einmal gegen jede andere in ihrer Gruppe. Beim Sieg einer Mannschaft gibt es 3 Punkte für den Sieger und 0 Punkte für den Verlierer, beim Unentschieden bekommen beide Mannschaften je einen Punkt.

(a) Wie viele Punkte hat der Gruppensieger einer Gruppe mindestens?

(b) Wie viele Punkte hat der Gruppenzweite einer Gruppe mindestens?

Lösung.

(a) Es werden $\binom{n}{2}$ Spiele ausgetragen, in denen mindestens $2\binom{n}{2} = n(n-1)$ Punkte an n Mannschaften vergeben werden. Schubfachprinzip $\Longrightarrow$ es gibt mindestens eine Mannschaft, die $n-1$ Punkte bekommt.

(b) (Wir vermuten, dass der Gruppenzweite mindestens $n-2$ Punkte bekommen muss.) Wir nehmen an, dass der Gruppenzweite (und damit auch alle schlechter platzierten) höchstens $n-3$ Punkte bekommt. Der Sieger bekommt dann mindestens $2\binom{n}{2} - (n-1)(n-3) = 3(n-1)$ Punkte. D.h. aber, dass er alle Spiele gewinnen müsste. Dann ist aber die tatsächliche Anzahl der verteilten Punkte mindestens $2(\binom{n}{2} - n + 1) + 3(n-1) + (n-1)(n-3) > 3(n-1) + (n-1)(n-3)$ (Widerspruch).

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Unter einer Münzenpyramide verstehen wir ein mehrzeiliges Arrangement gleichartiger Münzen derart, dass jede Münze einer Reihe genau zwei Münzen der tiefer gelegenen Nachbarreihe berührt (in der Abbildung 2 sind alle Pyramiden mit 3 Münzen in der untersten Reihe dargestellt). Jede Münzenreihe ist zusammenhängend. Stellen Sie eine Rekursionsgleichung für die Anzahl f_n der Münzenpyramiden mit n Münzen in der untersten Reihe auf.

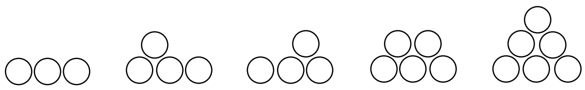

Abbildung 2:

Lösung. Wir betrachten die Anzahl der Münzenpyramiden mit n Münzen in der untersten (d.h. letzten) Reihe. Die vorletzte Reihe kann $0 \leq j \leq n-1$ Münzen aufnehmen. Bei $j \geq 1$ Münzen (zusammenhängend), gibt es $n-j$ Möglichkeiten, diese Reihe zu positionieren. Insgesamt erhalten wir also $\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)f_j$ Pyramiden. Wenn die vorletzte Reihe leer ist, gibt es genau eine Pyramide. Die Rekursion lautet also

$$f_n = 1 + \sum_{j=1}^{n-1}(n-j)f_j.$$

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Sei $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n > 0$, $n \geq 2$, eine Folge natürlicher Zahlen. Zeigen Sie, dass ein Baum auf n Knoten $v_1, \ldots, v_n$ mit $\deg(v_i) = d_i$ genau dann existiert, wenn $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$.

Lösung. Es ist klar, dass die Bedingung $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$ notwendig ist. Ein Baum mit n Knoten enthält genau $n-1$ Kanten (jeder Knoten bis auf die Wurzel hat einen eindeutigen Elter). Wenn die Knotengrade summiert werden, wird jede Kante doppelt gezählt und damit gilt $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$.
Wir beweisen jetzt, dass die obige Bedingung hinreichend ist. Dazu sei

$$d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n > 0 \tag{1}$$

eine Folge natürlicher Zahlen. Es gelte $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$. Wir beweisen durch Induktion nach n, dass dann ein Baum $B = (V, E)$ konstruiert werden kann mit (1) als Folge der Knotengrade (Gradfolge).
Für $n = 2$ gilt $d_1 = d_2 = 1$ und B ist der Pfad mit 2 Knoten. Sei jetzt $n > 2$ beliebig aber fix und $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n > 0$ eine Folge mit $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$. Wir zeigen, dass es mindestens ein i mit $d_i = 1$ geben muss – die Annahme $d_i \geq 2$ für alle i führt wegen $2n-2 = \sum_{i=1}^{n} d_i \geq 2n$ zum Widerspruch. Also gilt $d_n = 1$.
Wir konstruieren jetzt einen Baum auf n Knoten $\{v_1, \ldots, v_n\}$, in dem $\deg(v_n) = 1$ ist. Wir betrachten die Folge $d_1 \geq d_2 \geq \ldots d_{n-1} > 0$, wählen eine beliebige Zahl $d_k > 1$ aus und vermindern diese um 1 – das Blatt v_n wird also im konstruierten Baum am Knoten v_k hängen.
Dadurch entsteht eine neue Folge

$$d'_1 \geq d'_2 \geq \cdots \geq d'_{n-1} > 0 \tag{2}$$

mit $\sum_{i=1}^{n-1} d'_i = 2(n-2)-2 = 2(n-1)-2$. Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es einen Baum $\tilde{B} = (\tilde{V}, \tilde{E})$, der die Folge (2) als Gradfolge hat. Sei $\tilde{V} = \{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ und $d(v_i) = d'_i$. Nun sei $V = \tilde{V} \cup \{v_n\}$ und $E = \tilde{E} \cup \{\{v_k, v_n\}\}$. Der Baum $B = (V, E)$ hat dann n Knoten $\{v_1, \ldots, v_n\}$ mit $d(v_i) = d_i$, also ist (1) die Gradfolge von B.

Aufgabe 6 (2+3 Punkte)
Sei $G = (A \cup B, E)$ ein k-regulärer bipartiter Graph. Beweisen Sie ausführlich:

(a) $|A| = |B|$;

(b) G enthält ein perfektes Matching.

Lösung.

(a) Es gibt $k|A|$ Kanten, die von A ausgehen und in B enden. Diese Anzahl muss aber $k|B|$ sein, d.h. $|A| = |B|$.

(b) Satz von Hall: Angenommen, es gibt eine Teilmenge $X \subseteq A$ mit $Y := \Gamma(X)$ $|X| > |Y|$. Alle $k|X|$ Kanten enden in Y und nach dem Schubfachprinzip muss es einen Knoten in Y mit Grad $\lceil \frac{k|X|}{|Y|} \rceil > k$ geben (Widerspruch).

Aufgabe 7 (2+2+3 Punkte)

Ein *Binomialbaum* B_k ist ein Baum mit einer ausgezeichneten Wurzel, die Kinder jedes Knotens sind geordnet (d.h. es gibt erstes, zweites, ... Kind) und B_k hat folgenden rekursiven Aufbau: B_0 besteht aus einem einzigen Knoten; B_k besteht aus B_{k-1}, wobei als erstes Kind der Wurzel ein weiteres B_{k-1} angehängt wird (s. Abbildung 3).

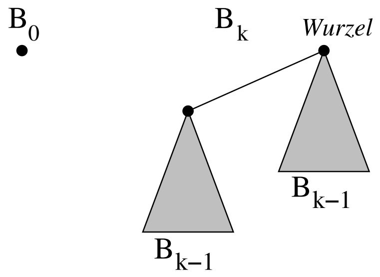

Abbildung 3:

Beweisen Sie:

(a) B_k hat 2^k Knoten.

(b) Die Tiefe von B_k ist k.

(c) In B_k gibt es $\binom{k}{i}$ Knoten auf dem Level i (Level i besteht aus allen Knoten, bei denen der Pfad, der sie mit der Wurzel verbindet, Länge i hat).

Lösung. Wird wegen Info4 noch nicht verraten.

Aufgabe 8 (5 Punkte)

Geben Sie ein Verfahren zur Konstruktion eines endlichen Körpers mit 49 Elementen an. Begründen Sie, dass die dadurch definierte Struktur ein Körper ist.

Lösung. Wir nehmen den Körper $\mathbb{Z}_7$ und suchen ein irreduzibles Polynom über diesem Körper. Z.B. ist $x^2 + 1$ irreduzibel (es hat keine Nullstelle in $\mathbb{Z}_7$). Damit ist $\mathbb{Z}_7[x]/(x^2 + 1)$ ein Körper – es ist klar ein Ring und, da $x^2 + 1$ irreduzibel ist, gibt es zu jedem Polynom $p \in \mathbb{Z}_7[x]$ ein $q \in \mathbb{Z}_7[x]$ mit $pq \equiv 1 \bmod x^2 + 1$ (q kann mit dem Euklidischen Algorithmus bestimmt werden). Dieser Körper enthält 49 Elemente.

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Die Menge $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta\}$ bildet bezüglich Multiplikation eine Gruppe. Ergänzen Sie in der Multiplikationstabelle in der Abbildung 4 die fehlenden

Einträge (durch große lateinische Buchstaben markiert) und begründen Sie ausführlich Ihre Entscheidung.

	α	β	γ	δ	ϵ	ζ
α	δ	α	ζ	β	γ	ϵ
β	α	**A**	**B**	**G**	ϵ	ζ
γ	ζ	γ	α	ϵ	β	δ
δ	β	δ	ϵ	α	ζ	γ
ϵ	γ	**C**	β	ζ	δ	**F**
ζ	ϵ	ζ	δ	γ	**D**	**E**

Abbildung 4:

Lösung. Man muss nur die Eigenschaft ausnutzen, dass in jeder Zeile/Spalte jedes Element genau einmal vorkommen muss. Dadurch lassen sich die unbekannten Elemente, in der Reihenfolge B–G–D–A–C–F–E, bestimmen. (in diesem Beispiel handelt es sich um die multiplikative Gruppe $\mathbb{Z}_7^*$ mit $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 3, \delta = 4, \epsilon = 5, \zeta = 6$).