# Diskrete Strukturen I, WS 99/00
Klausur T1, 17. Januar 2000

## Aufgabe 1

(a) Wieviele Permutationen $\pi : [10] \to [10]$ gibt es, für die $\pi(1) = 8$ und $\pi(3) = 3$ gilt?

### Lösung.

Für jedes $x \in \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ muß ein $\pi(x) \in \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}$ gewählt werden, so daß insgesamt eine bijektive Abbildung definiert wird. Dafür gibt es $8! = 40320$ Möglichkeiten.

(b) Wieviele Permutationen $\pi : [11] \to [11]$ gibt es, für die $\pi(4) = 5$ und $\pi(3) = 4$ gilt?

### Lösung.

Für jedes $x \in \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ muß ein $\pi(x) \in \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ gewählt werden, so daß insgesamt eine bijektive Abbildung definiert wird. Dafür gibt es $9! = 362880$ Möglichkeiten.

(c) Wieviele Permutationen $\pi : [11] \to [11]$ gibt es, für die $\pi(4) = 5$ und $\pi(6) = 4$ und $\pi(11) = 1$ gilt?

### Lösung.

Für jedes $x \in \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$ muß ein $\pi(x) \in \{2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ gewählt werden, so daß insgesamt eine bijektive Abbildung definiert wird. Dafür gibt es $8! = 40320$ Möglichkeiten.

(d) Wieviele Permutationen $\pi : [8] \to [8]$ gibt es, für die $\pi(2) = 2$ gilt?

### Lösung.

Für jedes $x \in \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ muß ein $\pi(x) \in \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ gewählt werden, so daß insgesamt eine bijektive Abbildung definiert wird. Dafür gibt es $7! = 5040$ Möglichkeiten.

(e) Wieviele Permutationen $\pi : [13] \to [13]$ gibt es, für die $\pi(4) = 2$ und $\pi(7) = 3$ und $\pi(8) = 4$ gilt?

**Lösung.**

Für jedes Urbild $x \in \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13\}$ muß ein Bild $\pi(x)$ aus $\{1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ gewählt werden, so daß insgesamt eine bijektive Abbildung definiert wird. Dafür gibt es $10! = 3628800$ Möglichkeiten.

## Aufgabe 2

Es bezeichne $a_n$ die Anzahl Möglichkeiten $n-5$ schwarze und 5 weiße Türme so auf einem $n \times n$ Schachfeld aufzustellen, daß keine zwei Türme sich gegenseitig schlagen können.

Hinweis: Zwei Türme können sich genau dann schlagen, wenn sie (unabhängig von der Farbe!) in der gleichen Zeile oder Spalte stehen.

Berechnen Sie $a_9$.

Lösungshinweis: Es gilt $a_6 = 4320$.

## Lösung.

Aus dem Hinweis ergibt sich, daß in jeder Zeile höchstens ein Turm stehen darf; dasselbe gilt für jede Spalte. Da insgesamt $n$ Türme vorhanden sind, steht in jeder Zeile und in jeder Spalte *genau* ein Turm.

Es gibt in der ersten Zeile $n$ mögliche Felder, auf denen ein Turm stehen kann. Für die zweite Zeile bleiben somit nur noch $n-1$ wählbare Positionen für einen Turm, usw. Dies ergibt insgesamt $n!$ Möglichkeiten, Felder für die $n$ Türme zu wählen.

Schließlich müssen noch die 5 weißen und $n-5$ schwarzen Türme auf die gewählten Felder verteilt werden; dafür gibt es $\binom{n}{5}$ Möglichkeiten. Insgesamt ergibt sich:

$$a_n = n! \cdot \binom{n}{5} \quad \text{und somit} \quad a_9 = 9! \cdot \binom{9}{5} = 362880 \cdot 126 = 45722880$$

## Aufgabe 3

Wir bezeichnen mit $\hat{S}_{n,k}$ die Anzahl der Partitionen einer $n$-elementigen Menge in $k$ Klassen, so daß jede Klasse mindestens zwei Elemente enthält.

Analog zu den Stirlingzahlen 2. Art kann man zeigen, daß für die Zahlen $\hat{S}_{n,k}$ eine Rekursionsgleichung der Form

$$\hat{S}_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \geq 2 \text{ und } k = 1 \\ a(n) & \text{falls } n = 2k \\ b(n,k)\hat{S}_{n-2,k-1} + c(n,k)\hat{S}_{n-1,k} & \text{falls } n > 2k \end{cases}$$

gilt, wobei $a(n), b(n,k)$ und $c(n,k)$ geeignete Funktionen sind.

Bestimmen Sie $a(20)$.

## Lösung.

Für $n = 2k$ ist die Anzahl der Möglichkeiten gesucht, die $n$-elementige Menge in $k$ 2-elementige Teilmengen zu partitionieren. Es gibt $n!$ Möglichkeiten, die $n$ Elemente auf $k$ geordnete Paare $p_1 = (a_1, b_1), \ldots, p_k = (a_k, b_k)$ zu verteilen. Jedes Paar beschreibt eine Partitionskomponente; da aber das Paar $(x, y)$ dieselbe Komponente beschreibt wie $(y, x)$, ist die Anzahl für jedes der $k$ Paare zu halbieren. Außerdem wird die Partition bereits durch $k$ *ungeordnete* Paare beschrieben; $k!$ geordnete Paare definieren somit dieselbe Partition. Es ergibt sich:

$$a(n) := \frac{n!}{(2!)^k \cdot k!} = \frac{n!}{2^{(n/2)} \cdot (n/2)!}$$

Für $n = 20$:

$$a(20) = \frac{20!}{2^{10} \cdot 10!} = \frac{20!}{1024 \cdot 10!} = 654729075$$

## Aufgabe 4

Fortsetzung der vorigen Aufgabe.

Bestimmen Sie $b(30, 12)$.

## Lösung.

Ohne Einschränkung sei $[n] = \{1, \ldots, n\}$ die $n$-elementige Menge. Betrachtet man alle Partitionen von $[n]$, die die Voraussetzung erfüllen, so gibt es für das letzte Element $n$ zwei Fälle.

Im ersten Fall bildet $n$ mit einem weiteren Element $i$ ($1 \leq i \leq n-1$) eine Partitionskomponente $\{i, n\}$ der Mächtigkeit 2. (Im zweiten Fall ist $n$ in einer Komponente mit mehr als 2 Elementen enthalten.)

Falls $i = n-1$, so bleibt nach Entfernen der Komponente $\{n-1, n\}$ aus der Partition eine $(k-1)$-Partition der Menge $[n-2]$ übrig, die die Voraussetzung erfüllt; davon gibt es $\hat{S}_{n-2,k-1}$ Stück.

Für $i$ kann man aber auch jedes andere Element aus $[n-1]$ wählen; es ergibt sich stets dieselbe Anzahl an abgezählten Partitionen. Man hat insgesamt also $n-1$ Wahlmöglichkeiten für $i$; daher gilt:

$$b(n,k) = n-1 \qquad \text{insbesondere:} \quad b(30,12) = 30-1 = 29$$

[*Ergänzung:* Im zweiten Fall bildet man $k$-Partitionen der Menge $[n-1] = \{1, \ldots, n-1\}$, dabei gibt es $\hat{S}_{n-1,k}$ Möglichkeiten. Zu einer dieser $k$ Partitionskomponenten kann dann $n$ hinzugefügt werden, es gibt also insgesamt $k\hat{S}_{n-1,k}$ Möglichkeiten. Daher gilt $c(n,k) = k$.]

## Aufgabe 5

Für eine Gerichtsverhandlung im Land Fantasia sollen 12 Juroren gewählt werden. Zur Auswahl stehen 40 Personen $P_1, \ldots, P_{40}$. Verteidigung und Staatsanwaltschaft ordnen jeder dieser 40 Personen $P_i$ jeweils einen Wert $v_i$ bzw $s_i$ aus $\{-10, -9, \ldots, 0, \ldots, 9, 10\}$ zu, der die Präferenz für diese Person als Jury-Mitglied widerspiegelt.

Ihre Aufgabe ist es nun, eine bestmögliche Jury zusammenzustellen. D.h., eine Teilmenge $I \subset \{1, \ldots, 40\}$ der Kardinalität $|I| = 12$ zu bestimmen, für die

$$\left| \sum_{i \in I} v_i - \sum_{i \in I} s_i \right|$$

so klein wie möglich ist.

Sie beschließen, für diese Aufgabe ein Programm zu schreiben, daß alle Möglichkeiten durchprobiert. Ein Testlauf zeigt, daß pro Sekunde 100 Möglichkeiten abgearbeitet werden. Nach wievielen Minuten wird Ihr Programm terminieren? (Runden Sie dabei etwaig entstehende rationale Zahlen nach den üblichen Regeln auf die nächstliegende ganze Zahl.)

## Lösung.

Das Programm probiert *alle* Möglichkeiten durch; davon gibt es $\binom{40}{12}$. Zahl der benötigten Sekunden:

$$\binom{40}{12}/100 = 5586853480/100 = 55868534,8$$

Das Programm terminiert nach $55868534,8/60 = 931142,25 \approx 931142$ Minuten. (Das sind etwa 647 Tage.)

## Aufgabe 6

Es gibt einen 6-regulären planaren Graphen auf 17 Knoten.

Bewertungshinweis: Für die richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt, für eine falsche Antwort wird Ihnen 1 Punkt abgezogen.

(a) Stimmt.

(b) Stimmt nicht.

## Lösung.

Sei $G = (V, E)$ ein solcher Graph. Nach Angabe gilt $|V| = 17$ und

$$|E| = \frac{1}{2}\sum_{v\in V} \deg(v) = \frac{1}{2}|V| \cdot 6 = 51$$

Nach Satz 2.33 gilt für planare Graphen $|E| \leq 3|V| - 6$. Hier gilt jedoch $|E| = 51 > 45 = 3|V| - 6$. Es kann also keinen solchen Graphen geben; die Aussage stimmt nicht.

## Aufgabe 7

Es gibt einen Graphen $G = (V, E)$ mit $\chi(G) = 3$ und $\chi'(G) = 3$.

Bewertungshinweis: Für die richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt, für eine falsche Antwort wird Ihnen 1 Punkt abgezogen.

(a) Stimmt.

(b) Stimmt nicht.

## Lösung.

Die Aussage stimmt, denn ein Dreieck $G = K_3$ ist ein solcher Graph: Man benötigt mindestens 3 Farben für eine Kanten- bzw. Knotenfärbung.

## Aufgabe 8

Jeder zusammenhängende 6-reguläre Graph enthält eine Eulertour.

Bewertungshinweis: Für die richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt, für eine falsche Antwort wird Ihnen 1 Punkt abgezogen.

(a) Stimmt.

(b) Stimmt nicht.

## Lösung.

Die Behauptung stimmt: Da jeder Knoten geraden Grad hat, enthält der Graph nach Satz 2.29 eine Eulertour.

## Aufgabe 9

Jeder 3-reguläre bipartite Graph enthält ein perfektes Matching.

Bewertungshinweis: Für die richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt, für eine falsche Antwort wird Ihnen 1 Punkt abgezogen.

(a) Stimmt.

(b) Stimmt nicht.

## Lösung.

Die Aussage stimmt nach Korollar 2.46 (mit $k = 3$).

## Aufgabe 10

Bestimmen Sie die Anzahl der Wörter der Länge 14 über dem Alphabet $\{0, 1, 2\}$, die keine zwei aufeinanderfolgenden Nullen enthalten.

Tip: Stellen Sie eine geeignete Rekursionsgleichung auf und lösen Sie diese mit Maple.

## Lösung.

Sei $a_n$ die Anzahl aller Wörter der Länge $n$ über dem Alphabet $\{0, 1, 2\}$, die keine zwei aufeinanderfolgenden Nullen enthalten. Offensichtlich ist $a_0 = 1$ (leeres Wort $\varepsilon$) und $a_1 = 3$ (einzelne Ziffer 0, 1 oder 2).
Sei $n > 1$ und $w$ ein Wort der Länge $n$, in dem keine zwei Nullen aufeinanderfolgen.

**Fall 1:** $w$ endet mit 0
Die vorletzte Ziffer darf keine 0 sein, ist also eine 1 oder 2. Streicht man die beiden letzten Ziffern, so bleibt ein Wort übrig, das ebenfalls die Voraussetzung erfüllt. Es gibt $a_{n-2}$ solche Wörter der Länge $n-2$, und an jedes kann 10 oder 20 angehängt werden.

**Fall 2:** $w$ endet mit 1 oder 2
Streicht man die letzte Ziffer, so bleibt ein Wort übrig, das ebenfalls die Voraussetzung erfüllt. Es gibt $a_{n-1}$ solche Wörter der Länge $n-1$, und an jedes kann 1 oder 2 angehängt werden.

Rekursionsgleichung:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \\ 3 & \text{falls } n = 1 \\ 2\,a_{n-1} + 2\,a_{n-2} & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$

als Maple-Funktion:

```
a := proc(n)
  if(n=0) then RETURN(1); fi;
  if(n=1) then RETURN(3); fi;
  RETURN( 2*a(n-1) + 2*a(n-2) );
end;
```

Für $n = 14$ ergibt sich $a_{14} = 1390592$