Diskrete Strukturen I, WS 99/00
Klausur T2, 17. Januar 2000

(a) Wieviele Permutationen $\pi : [11] \to [11]$ gibt es, für die $\pi(i) = i$ für alle ungeraden $i \in [11]$.
Lösung:
Die gesuchte Anzahl der Permutationen stimmt mit der Anzahl der Permutationen der gerade Zahlen aus [11] überein. Da in [11] genau 5 gerade Zahlen enthalten sind, gibt es $5! = 120$ verschieden Permutationen.

(b) Wieviele Permutationen $\pi : [11] \to [11]$ gibt es, für die $\pi(i) = i$ für alle geraden $i \in [11]$.
Lösung:
$6! = 720$

(c) Wieviele Permutationen $\pi : [13] \to [13]$ gibt es, für die $\pi(i) = i$ für alle ungeraden $i \in [13]$.
Lösung:
$6! = 720$

(d) Wieviele Permutationen $\pi : [13] \to [13]$ gibt es, für die $\pi(i) = i$ für alle geraden $i \in [13]$.
Lösung:
$7! = 5040$

(e) Wieviele Permutationen $\pi : [15] \to [15]$ gibt es, für die $\pi(i) = i$ für alle ungeraden $i \in [15]$.
Lösung:
$7! = 5040$

(f) Wieviele Permutationen $\pi : [15] \to [15]$ gibt es, für die $\pi(i) = i$ für alle geraden $i \in [15]$.
Lösung:
$8! = 40320$

(g) Wieviele Permutationen $\pi : [18] \to [18]$ gibt es, für die $\pi(i) = i$ für alle geraden $i \in [18]$.
Lösung:
$9! = 362880$

(h) Wieviele Permutationen $\pi : [21] \to [21]$ gibt es, für die $\pi(i) = i$ für alle ungeraden $i \in [21]$.
Lösung:
$10! = 3628800$

Aufgabe 1

Der Knesergraph $KG(n, k)$ mit Parametern n und k ist wie folgt definiert. Die Knotenmenge besteht aus allen k-elementigen Teilmengen der Menge $[n]$ und zwei Teilmengen sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sie disjunkt sind.

Wieviele Kanten enthält der Knesergraph $KG(15, 6)$?

Lösung:
Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten eine k-elementige Teilmenge aus $[n]$ zu wählen. Eine davon disjunkte Teilmenge erhält man durch Ziehen einer k-elementigen Teilmenge aus den verbleibenen $n-k$ Zahlen. Auf diese Weise entstehen Paare von disjunkten k-elementigen Teilmengen. Da aber jedes solche Paar von k-elemetigen Teilmengen doppelt gezählt wird, muss die Anzahl der Paare (und damit der Kanten) noch durch 2 geteilt werden. Der Graph $KG(n, k)$ enthält also $\frac{\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}}{2}$ viele Kanten. Damit hat der Graph $KG(15, 6)$ genau 210210 Kanten.

Aufgabe 2

Wieviele Wörter über $\{a, b, c, d\}$ der Länge 14 gibt es, die mindestens eine drei folgenden drei Bedingungen erfüllen:
i) an der ersten Stelle steht ein a,
ii) an der siebten Stelle steht ein b, oder
iii) an der zehnten Stelle steht ein c.

Hinweis: Bitte beachten Sie daß ein „Durchprobieren“ aller Worte der Länge 14 während der Klausur keinen Erfolg verspricht!

Lösung:
Wir bezeichnen mit A die Menge der Worte, bei denen an der ersten Stelle ein a steht, mit B die Menge der Worte, bei denen an der siebenten Stelle ein b steht und schliesslich mit C die Menge der Worte mit einem c an der zehnten Stelle. Gesucht ist dann die Zahl der Elemente in der Vereinigung dieser Mengen, also genau $|A \cup B \cup C|$.
Es gilt:
$|A| = |B| = |C| = 4^{13}$,

$|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 4^{12}$,
$|A \cap B \cap C| = 4^{11}$.

Die Siebformel ergibt:
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 3 \cdot 14^{13} - 2 \cdot 4^{12} + 4^{11} = 155189248$.

Aufgabe 3

An einem Fußballtunier für einen wohltätigen Zweck dürfen sich Teams verschiedener Firmen beteiligen. Voraussetzung ist jedoch, daß ein Team aus mindestens 11 Spielern bestehen muß und daß alle Spieler eines Teams im selben Monat Geburtstag haben müssen. Wieviele Mitarbeiter muß eine Firma mindestens haben, damit sie auf jeden Fall ein Team stellen kann?

Lösung:
Anwendung des Schubfachprinzips: Damit keine Mannschaft gebildet werden kann, dürfen in jedem Monat nur 10 Mitarbeiter Geburtstag haben. Dieser Fall kann bei $12 * 10 = 120$ Mitarbeitern durchaus eintreten. Jeder weitere Mitarbeiter müsste aber in einem Monat Geburtstag haben, in dem schon 10 Mitarbeiter Geburtstag haben. Daher kann bei $120 + 1 = 121$ Mitarbeitern auf jeden Fall ein Fussballteam gebildet werden.

Aufgabe 4

Für eine Gerichtsverhandlung im Land Fantasia sollen 12 Juroren gewählt werden. Zur Auswahl stehen 40 Personen $P_1, \dots, P_{40}$. Verteidigung und Staatsanwaltschaft ordnen jeder dieser 40 Personen P_i jeweils einen Wert v_i bzw s_i aus $\{-10, -9, \dots, 0, \dots, 9, 10\}$ zu, der die Präferenz für diese Person als Jury-Mitglied widerspiegelt.

Ihre Aufgabe ist es nun, eine bestmögliche Jury zusammenzustellen. D.h., eine Teilmenge $I \subset \{1, \dots, 40\}$ der Kardinalität $|I| = 12$ zu bestimmen, für die

$$\left| \sum_{i \in I} v_i - \sum_{i \in I} s_i \right|$$

so klein wie möglich ist.

Sie beschließen, für diese Aufgabe ein Programm zu schreiben, daß alle Möglichkeiten durchprobiert. Ein Testlauf zeigt, daß pro Sekunde 100 Möglichkeiten abgearbeitet werden. Nach wievielen Minuten wird Ihr Programm terminieren? (Runden Sie dabei etwaig entstehende rationale Zahlen nach den üblichen Regeln auf die nächstliegende ganze Zahl.)

Lösung:
Das Programm prüft jedes mögliche Jurorenteam I auf seinen Wert $\left|\sum_{i\in I} v_i - \sum_{i\in I} s_i\right|$. Dabei kann es 100 Teams pro Sekunde überprüfen. Die Zahl der möglichen Jurorenreams beträgt $\binom{40}{12}$. Daher terminiert das Programm nach $\frac{\binom{40}{12}}{100*60}$ oder (aufgerundet) 931142 Minuten.

Aufgabe 5

Es gibt einen Graphen auf 151 Knoten, in dem alle Knoten Grad 3, 5 oder 7 haben.

Bewertungshinweis: Für die richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt, für eine falsche Antwort wird Ihnen 1 Punkt abgezogen.

(a) Stimmt.

(b) Stimmt nicht.

Lösung:
Stimmt nicht: In einem Graphen ist die Zahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

Aufgabe 6

Jeder 2-reguläre zusammenhängende Graph ist Hamiltonsch.

Bewertungshinweis: Für die richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt, für eine falsche Antwort wird Ihnen 1 Punkt abgezogen.

(a) Stimmt.

(b) Stimmt nicht.

Lösung:
Stimmt: Jeder 2-reguläre Graph ist ein System von Kreisen. Da der Graph zusammenhängend ist, besteht der Graph aus einem einzelnen Kreis, der den Hamiltonpfad bildet.

Aufgabe 7

Es gibt einen zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| = 100$ und $s \in V$ für den eine Tiefensuche und eine Breitensuche, jeweils mit Startknoten s, den gleichen spannenden Baum erzeugen.

Bewertungshinweis: Für die richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt, für eine falsche Antwort wird Ihnen 1 Punkt abgezogen.

(a) Stimmt.

(b) Stimmt nicht.

Lösung:
Stimmt: Mann nehme einen Baum auf 100 Knoten. Dieser ist natürlich ein spannender Baum, für den Tiefensuche und Breitensuche alle Kanten anfassen müssen.

Aufgabe 8

Ist G ein bipartiter Graph mit ungerader Knotenanzahl, so entält G keinen Hamiltonkreis.

Bewertungshinweis: Für die richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt, für eine falsche Antwort wird Ihnen 1 Punkt abgezogen.

(a) Stimmt.

(b) Stimmt nicht.

Lösung:
Stimmt: Sei die Knotenpartition eines bipartiten Graphen mit A und B bezeichnet. Gäbe es nun einen Hamiltonkreis, so würde dieser alternierend verschiedene Knoten aus A und B enthalten und schliesslich wieder zum Startknoten führen. Insbesondere muss also die Zahl der Knoten in A und B übereinstimmen und die Knotenzahl wäre dann gerade.

Aufgabe 9

Es sei a_n die Anzahl Teilmengen der Menge $[n]$, die keine *drei* aufeinanderfolgenden Zahlen enthalten.

Beispiel: Für $n = 4$ gilt $a_4 = 13$. Die entsprechenden Teilmengen sind: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$.

Bestimmen Sie a_{12}.

Tip: Stellen Sie eine geeignete Rekursionsgleichung auf und lösen Sie diese mit Maple (`rsolve` gibt hier keine geschlossene Formel).

Lösung:
Die Anzahl der Mengen ist gleich der Anzahl der Teilsequenzen aus der Sequenz $1\ 2\ \ldots\ n$, die keine drei aufeinanderfolgenden Zahlen enthalten. Um die Teilsequenzen zu zählen werden diese in folgende drei disjunkte Menge aufgeteilt:

1. Die Mengen die n nicht enthalten
2. Die Mengen die n enthalten jedoch nicht $n-1$
3. Die Mengen die n und $n-1$ enthalten

Die Anzahl der Teilsequenzen ist die Summe der Mächtigkeiten der drei Mengen. Diese können wie folgt bestimmt werden:

1. Da n in keiner Teilsequenz vorkommt, ergeben sich daraus keine Einschränkungen. D.h. es gibt genau soviele zulässige Teilsequenzen wie aus der Sequenz $1\ \ldots\ n-1$ ausgewählt werden können, d.h. a_{n-1}.
2. Da $n-1$ in keiner Teilsequenz vorkommt können die Zahlen $1\ \ldots\ n-2$ ohne zusätzliche Einschränkungen ausgewählt werden. Die Mächtigkeit der Menge ist also geleich der Anzahl der gültigen Auswahlen aus der Sequenz $1\ \ldots\ n-2$, d.h. a_{n-2}.
3. Da sowohl n als auch $n-1$ in der Teilsequenz vorkommen, darf nach Voraussetzung $n-2$ nicht vorkommen. Für die restlichen Zahlen gelten wieder keine zusätzlichen Einschränkungen. Es gibt also, analog zu oben, a_{n-3} solche Teilsequenzen

Hiermit ergibt sich also, folgende Rekursionsgleichung:

$$
\begin{array}{lll}
a_n & = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} & \\
a_0 & = |\{\}| & = 1 \\
a_1 & = |\{\}, \{1\}| & = 2 \\
a_2 & = |\{\}, \{1\}\{2\}, \{1,2\}| & = 4
\end{array}
$$

Es ergibt sich also ein Wert von $a_{12} = 1705$. In Mapel kann dies folgendermaßen umgesetzt werden:

```
> a := unapply(rsolve({a(n) = a(n-1) + a(n-2) + a(n-3),
                        a(0) = 1, a(1) = 2, a(2) = 4},a),n);
> evalf(a(12));
```

1705.000000