Diskrete Strukturen I, WS 99/00
Klausur T3, 18. Januar 2000

Aufgabe 1

(a) Wieviele injektive Abbildungen $f : [8] \to [12]$ gibt es?

Lösung
Vergleiche Skript, Seite 29 Tabelle 1.3.

$$\Rightarrow \; 12^{\underline{8}} = 19958400$$

(b) Wieviele surjektive Abbildungen $f : [9] \to [6]$ gibt es?

Lösung
Vergleiche Skript, Seite 29 Tabelle 1.3

$$\Rightarrow \; 6! S_{9,6} = 1905120$$

Aufgabe 2
Bestimmen Sie den Koeffizienten von $a^4 b^{12} c^2$ in $(a^2 + b^3 + c)^8$.

Lösung
Aus 2 Termen $a^2 + b^3 + c$ wird a^2 gewählt, aus den restlichen Termen vier Mal b^3

$$\Rightarrow \; \binom{8}{2}\binom{6}{4} = 420$$

Aufgabe 3
Aufgabe falsch gestellt.

Aufgabe 4

20 identische (ununterscheidbare) Murmeln sollen so auf 4 verschiedene Kinder aufgeteilt werden, daß jedes Kind mindestens eine Murmel erhält. Wieviele Möglichkeiten gibt es hierfür?

Lösung

Man bezeichne mit k_i die Anzahl der Murmeln, die Kind i erhält, $i = 1 \dots 4$. Es soll gelten:

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 20 \;, \quad k_i > 0 \;, \quad i = 1 \dots 4$$

Die Zahl 20 kann man als

$$\overbrace{1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots + 1}^{20}$$

schreiben. Eine eindeutige Partition nach obiger Bedingung ist durch Wahl von 3 Pluszeichen aus den zur Verfügung stehenden 19 Pluszeichen gegeben, man erhält also:

$$\binom{19}{3} = 969$$

(vergleiche hierzu auch Skript Seite 27).

Aufgabe 5

In Ihrem neuen Job als Vorstandsassistent der Firma Tuminfo erhalten Sie den Auftrag eine neue Zuordnung der 10 Mitarbeiter $M_1, \dots, M_n$ der Vertriebsabteilung zu den n Großkunden $G_1, \dots, G_n$ vorzunehmen. Als Vorgaben erhalten Sie die Maßgabe, jedem Mitarbeiter genau einen der Großkunden zuzuordnen. Ebenfalls erhalten Sie Schätzungen für den erwarteten Umsatz für jede der n^2 Zuordnungen (M_i, G_j), $1 \leq i, j \leq n$. Erwartet wird von Ihnen die Angabe einer Zuordnung, die den zu erwartenden Umsatz maximiert.

Ihr erster Ansatz hierfür ist, ein kleines Programm zu schreiben, das alle möglichen Zuordnungen durchprobiert und die beste ausgibt. Für eine grobe Abschätzung der Laufzeit gehen Sie davon aus, daß Ihr Rechner pro Sekunde etwa 900 verschiedene Zuordnungen durchprobieren kann. Nach wievielen Minuten wird Ihr Programm terminieren? (Runden Sie dabei etwaig entstehende rationale Zahlen nach den üblichen Regeln auf die nächstliegende ganze Zahl.)

Lösung

Es gibt insgesamt 10! durchzuprobierende Anordnungen. Unser Programm schafft 900 pro Sekunde (also durch 900 teilen) und wir wollen die Minuten (nochmals durch 60 teilen). Es dauert also

$$\lfloor \frac{10!}{900 \cdot 60} \rfloor = 67 \text{ Minuten.}$$

Aufgabe 6

Es gibt einen planaren Graphen auf 17 Knoten, der einen Knoten mit Grad 16 enthält.

Bewertungshinweis: Für die richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt, für eine falsche Antwort wird Ihnen 1 Punkt abgezogen.

(a) Stimmt.

(b) Stimmt nicht.

Lösung

Ja, zum Beispiel ein Stern mit 17 Knoten.

Aufgabe 7

Jeder 3-reguläre Graph enthält ein perfektes Matching.

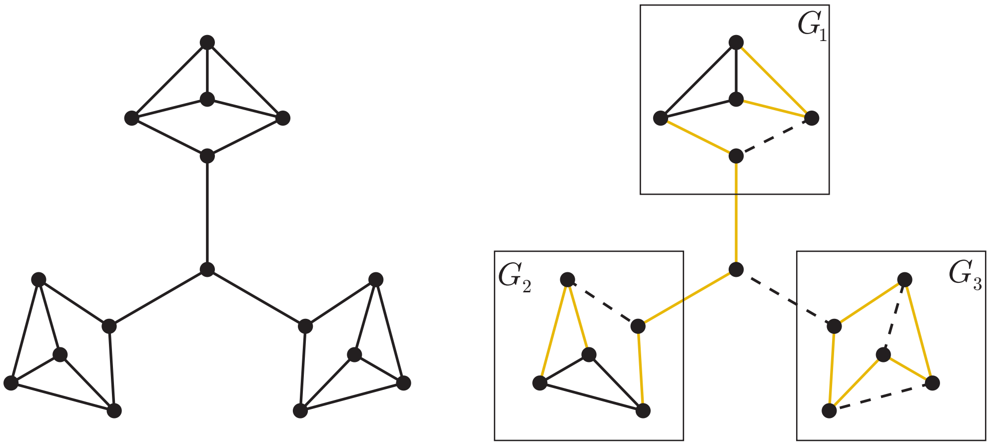
Bewertungshinweis: Für die richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt, für eine falsche Antwort wird Ihnen 1 Punkt abgezogen.

(a) Stimmt.

(b) Stimmt nicht.

Lösung

Stimmt nicht.
Gegenbeispiel:



Ein perfektes Matching muß den mittleren Knoten mit einer Kante überdecken. O.B.d.A. wählen wir als Kante des Matchings die untere rechte Kante (gestrichelt dargestellt). Wir sehen, daß sich dadurch in dem Teilgraphen G_3 ein perfektes Matching finden läßt. Wenn wir jetzt den Teilgraphen G_1 betrachten, erkennen wir, daß der eine der beiden Kanten, die von dem untersten Knoten ausgehen, im Matching enthalten sein muß. Sei nun o.B.d.A. (der Teilgraph G_1 ist symmetrisch) die gestrichelte Kante Teil des Matchings. Alle orange eingezeichneten Kanten können nun nicht mehr zum Matching gehören, und das verbleibende Dreieck in G_1 enthält kein perfektes Matching.

Aufgabe 8

Für jeden k-regulären bipartiten Graphen $G = (A \uplus B, E)$ gilt $|A| = |B|$.

Bewertungshinweis: Für die richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt, für eine falsche Antwort wird Ihnen 1 Punkt abgezogen.

(a) Stimmt.

(b) Stimmt nicht.

Lösung

Stimmt. Jeder Knoten in A hat k ausgehende Kanten. Betrachtet man alle Knoten in A, so haben die zusammen $k \cdot |A|$ ausgehende Kanten. Analog gilt:

alle Knoten in B haben zusammen $k \cdot |B|$ ausgehende Kanten. Da der Graph bipartit ist, muß gelten: $k|A| = k|B|$ und damit $|A| = |B|$.

Aufgabe 9

Der Baum mit Prüfercode $(5, 4, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$ enthält genau 6 Blätter.

Bewertungshinweis: Für die richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt, für eine falsche Antwort wird Ihnen 1 Punkt abgezogen.

(a) Stimmt.

(b) Stimmt nicht.

Lösung

Stimmt Anzahl der Blätter ist die Anzahl der fehlenden Ziffern im Prüfercode. Der hat die Länge 9, es gibt also 11 Knoten. $\Rightarrow$ Fehlende Ziffern 6,7,8,9,10,11 also 6 Stück.

Aufgabe 10

Betrachten Sie den folgenden Algorithmus, der die beiden größten Zahlen von $n \geq 2$ vielen Zahlen $a[1], \ldots, a[n]$ rekursiv bestimmt:

```
MaxMax(a, n)
if n = 2 then
  if a[1] < a[2] then
    return (a[1], a[2])
  else
    return (a[2], a[1])
if n = 3 then
  (M'1, M'2) ← MaxMax(a, 2);
  if a[3] > M'1 then
    return (a[3], M'1)
  elif a[3] > M'2
    return (M'1, a[3])
  else
    return (M'1, M'2)
else
  (M'1, M'2) ← MaxMax(a, n − 2);
  if a[n] < a[n − 1] then
```

Vertausche $a[n] \leftrightarrow a[n-1]$;
if $a[n] > M'_1$ **then**
  if $a[n-1] > M'_1$ **then**
    return $(a[n], a[n-1])$
  else
    return $(a[n], M'_1)$
elif $a[n] > M'_2$
  return $(M'_1, a[n])$
else
  return (M'_1, M'_2)

Bestimmen Sie die maximale Anzahl von Vergleichen (zwischen Werten $a[\cdot]$), die bei Aufruf von $\textsc{MaxMax}(a, 19)$ durchgeführt werden.

Lösung

Sei M_n die Anzahl der Aufrufe für $\textsc{MaxMax}(a, n)$. Dann gilt:

- $M_2 = 1$
- $M_3 = M_2 + 2 = 3$
- $M_n = M_{n-2} + 3$

Durch einfaches Expandieren erhält man $M_{19} = 27$