Diskrete Strukturen I, WS 99/00
Klausur T4, 18. Januar 2000

Aufgabe 1:

(a) Wieviele injektive Abbildungen $f : [8] \to [12]$ gibt es?

Lösung:
Es gibt $12^{\underline{8}}$ injektive Abbildungen.

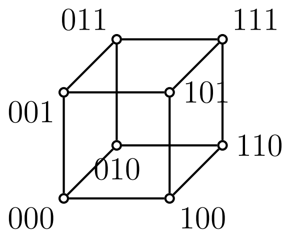
(b) Wieviele surjektive Abbildungen $f : [9] \to [6]$ gibt es?

Lösung:
Die Anzahl der surjektiven Abbildungen $f : A \to B$ mit $|A| = n$ und $|B| = k$ ergibt sich aus: $k!S_{n,k}$. In diesem Fall also $6!S_{9,6}$.

Aufgabe 2:

Der n-dimensionale Hyperwürfel H_n ist wie folgt definiert. Die Knotenmenge besteht aus allen Worten der Länge n über dem Alphabet $\{0, 1\}$. Zwei Knoten sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sich die entsprechenden Worte an genau einer Stelle unterscheiden.

Die folgende Graphik zeigt den 3-dimensionalen Hyperwürfel H_3:



Wieviele Kanten enthält der 8-dimensionale Hyperwürfel H_8?

Lösung:
H_8 hat $2^8 = 256$ Knoten. Jeder Knoten hat den Grad 8.
Mit $2|E| = \sum_{v \in V} deg(v) = 2048$ gilt: $|E| = 1024$.

Aufgabe 3:

Wieviele natürliche Zahlen $\leq 10^{10}$ sind weder durch 6 noch durch 15 noch durch 21 teilbar?

Lösung:

Durch Anwendung des Inklusions/Exklusionsprinzips ergibt sich folgender Lösungsweg: Von der Anzahl aller Zahlen $\leq 10^{10}$, also $n = 10^{10}$ werden zunächst alle Zahlen abgezogen, die durch 6 bzw. durch 15 bzw.

durch 21 teilbar sind. Dabei wurden die Zahlen, die durch 6 *und* 15 bzw. 6 *und* 21 bzw. 15 *und* 21 teilbar sind, jeweils doppelt

gezählt. Dabei werden die Zahlen, die durch 6 *und* 15 *und* 21 teilbar sind, dreifach gezählt. Damit gibt es $10^{10} - (\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + \lfloor \frac{n}{15} \rfloor + \lfloor \frac{n}{21} \rfloor)$

$+ (\lfloor \frac{n}{2*3*5} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2*3*7} \rfloor + \lfloor \frac{n}{3*5*7} \rfloor)$

$- \lfloor \frac{n}{2*3*5*7} \rfloor = 7809523811$

Zahlen $\leq 10^{10}$, die weder durch 6 noch 15 noch 21 teilbar sind.

Aufgabe 4:

3 identische (ununterscheidbare) Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wieviel verschiedene Ergebnisse können eintreten?

Lösung:

Entspricht 3 maligem Ziehen mit Zurücklegen aus der Menge [6], ungeordnet. Damit gibt es $\binom{6+3-1}{3} = 56$ verschiedene Ergebnisse.

Aufgabe 5:

In Ihrem neuen Job in einer Telekommunikationsfirma erhalten Sie den Auftrag, einen ersten Entwurf fr ein neues Festnetz zu planen. Als Eingabe erhalten Sie hierfür die n Standorte der Backbone-Rechner und die Leitungskosten zwischen je zwei dieser Rechner. Als Ausgabe erwartet man von Ihnen eine Liste von Verbindungen, die einerseits ausreicht, jeden Rechner mit jedem anderen zu verbinden, und andererseits die gesamten Leitungskosten so gering wie möglich hält.

Aus einer der Pflichtvorlesungen des dritten Semesters wissen Sie, daß als Topologie der Verbindungen nur ein Baum in Frage kommt. Sie beschliessen daher, ein kleines Programm zu schreiben, das alle möglichen Bäume durchprobiert und denjenigen ausgibt, der die billigste Lösung darstellt. Für eine grobe Abschätzung der Laufzeit gehen Sie davon aus, da Ihr Rechner pro Sekunde etwa 850 verschiedene solche Bäume durchprobieren kann.

Welche Laufzeitabschätzung ergibt sich daraus für Ihr Programm wenn $n = 14$ ist?

Geben Sie die Laufzeit in Tagen an, runden Sie dazu Ihr Ergebnis geeignet.

Lösung:

Es gibt n^{n-2}, also 14^{12}, Bäume auf 14 markierten Knoten. Da der Rechner 850 Bäume pro Sekunde testen kann, ergibt sich durch Umrechnung und Rundung eine Laufzeit von $\frac{14^{12}}{850*24*60*60}$, also 771976 Tagen.

Aufgabe 6:

Es gibt einen 3-regulären Graphen auf 21 Knoten.

Lösung:

Stimmt nicht.

Gäbe es einen 3-regulären Graphen auf 21 Knoten, so müßte der Graph wegen $\sum\limits_{v \in V} deg(v) = 2|E|$, also $\frac{3*21}{2} = 31.5$ Kanten besitzen.

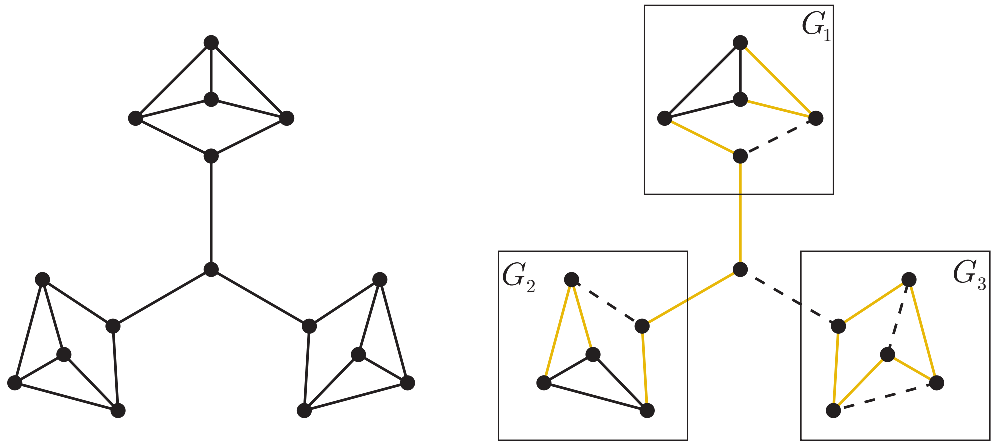
Aufgabe 7:

Es gibt einen 3-regulären, planaren Graphen auf 16 Knoten.

Lösung:

Stimmt.

Beispiel: Stern mit 3 Kanten, an die Subbäume (Rauten) mit jeweils 5 Knoten angehängt sind: planarer, 3-regulärer Graph mit 16 Knoten.



Aufgabe 8:

Es gibt einen azyklischen gerichteten Graphen, der stark zusammenhängend ist.

Lösung:

Stimmt nicht. Ein gerichteter Graph ist stark zusammenhängend, wenn für jedes Paar von Knoten $u, v \in V$ ein gerichteter Pfad existiert. Enthält jedoch ein Graph einen Pfad von u nach v und einen Pfad von v nach u, so ist der Graph nicht azyklisch.

Aufgabe 9:

Der Baum mit Prüfercode $(5, 4, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$ enthält genau 6 Blätter.

Lösung:

Stimmt. Der Prüfercode ist eine eineindeutige Codierung für Bäume mit

Knotenmenge $[n]$ auf Worte der Länge $n - 2$. Die Knoten vom Grad 1, also die Blätter, treten in der Codierung nicht auf.

Der gesuchte Baum hat somit die Knotenmenge $[11]$. 5 Knoten sind keine Blätter, der Baum hat also genau 6 Blätter.

Aufgabe 10:

Bestimmen Sie die Anzahl Worte der Länge $n = 17$ über dem Alphabet $\{0, 1, 2\}$, die eine gerade Anzahl von Einsen enthalten.

Tip: Stellen Sie eine geeignete Rekursionsgleichung auf und lösen Sie diese mit Maple (`rsolve`).

Lösungshinweis: Für $n = 6$ ist 365 die richtige Antwort.

Lösung:

Die Rekursion ergibt sich mit dem Induktionsanfang $anz(1) = 2$, nämlich die Worte 0 und 2. Für den Induktionsschritt von $n-1$ nach n sind die folgende Wortarten zu berücksichtigen:

1. Das Wort enthält bereits eine gerade Anzahl von 1en. Das Wort kann sowohl um eine 0 als auch um eine 2 erweitert werden; es entstehen $2 * anz(n-1)$ zu zählende Worte.

2. Das Wort enthält eine ungerade Anzahl von Worten. Davon gibt es $3^{n-1} + anz(n-1)$ Stück. Jedes dieser Worte ergibt durch Anhängen einer 1 ein zu zählendes Wort.

Damit ergibt sich folgende Rekursionsgleichung:
$anz(n) = 2 * anz(n-1) + (3^{n-1} - anz(n-1) = 3^{n-1} + anz(n-1)$.

$$anz(17) = 64570082.$$