<u>Motivation (1)</u>

- Wann gilt

$$ax^2 + bx + c = rx^2 + sx + t \quad ?$$

  (Hier ist Gleichheit als *Funktion* gemeint!)

  Genau dann wenn

$$a = r \quad \wedge \quad b = s \quad \wedge \quad c = t.$$

- Analog gilt:

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} b_n x^n \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_n = b_n \;\; \forall n \in \mathbb{N}_0 .$$

Motivation (2)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei durch eine Rekursionsgleichung gegeben.

Gesucht ist eine *explizite* Darstellung der a_n's.

ANSATZ:

- Betrachte $\quad A(x) := \sum_{n\geq 0} a_n x^n.$

- Verwende die Rekursionsgleichung um $A(x)$ in eine 'einfache' Form zu bringen, aus der man die Koeffizienten 'ablesen' kann.

Erzeugendenfunktion und formale Potenzreihen

Gegeben sei eine (unendliche) Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen.

Die Funktion $A(x) := \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ nennt man die **Erzeugendenfunktion** der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

ACHTUNG: Als *Funktion* ist $A(x)$ nur für solche x definiert, für die die (unendeliche) Summe konvergiert!

Um Konvergenzfragen ignorieren zu können, betrachten wir statt dessen zunächst **formale Potenzreihen**:

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

(Hier interpretiert als formaler Ausdruck und <u>nicht</u> als Funktion von x !)

Rechenregeln für formale Potenzreihen (1)

- **Addition:**

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n + \sum_{n\geq 0} b_n x^n \quad :\Longleftrightarrow \quad \sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)x^n$$

- **Subtraktion:** analog

- **Multiplikation:**

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\right) \quad :\Longleftrightarrow \quad \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n$$

Rechenregeln für formale Potenzreihen (2)

- **Division:**

  Die Reihe $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ heisst **Inverse** der Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ genau dann, wenn

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\right) = 1.$$

- **Ableitung:**

  Die Ableitung einer formalen Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ erhält man, in dem man jeden Term der Summe nach x ableitet. Also

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right)' = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n.$$