Anzahl Möglichkeiten 3 Bälle in 2 Urnen zu plazieren

	Urnen unterscheidbar	Urnen nicht unterscheidbar
Bälle a, b, c unterscheidbar	$(\emptyset, \{a, b, c\}),\ (\{a\}, \{b, c\}),$ $(\{b\}, \{a, c\}),\ (\{c\}, \{a, b\}),$ $(\{a, b\}, \{c\}),\ (\{a, c\}, \{b\}),$ $(\{b, c\}, \{a\}),\ (\{a, b, c\}, \emptyset)$	$\{\emptyset, \{a, b, c\}\},\ \{\{a\}, \{b, c\}\},$ $\{\{b\}, \{a, c\}\},\ \{\{c\}, \{a, b\}\}$
Bälle nicht unterscheidbar	$(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)$	$\{0, 3\}, \{1, 2\}$

Anzahl Möglichkeiten n Bälle in m Urnen zu plazieren

	Urnen unterscheidbar	Urnen nicht unterscheidbar
Bälle unterscheidbar	m^n	$\sum_{k=1}^{m} S_{n,k}$
Bälle nicht unterscheidbar	$\binom{n+m-1}{m-1}$	$\sum_{k=1}^{m} P_{n,k}$

Anzahl Möglichkeiten n Bälle in m Urnen zu plazieren

(Anzahl Abbildungen $f : B$[älle] $\to U$[rnen])

	beliebig	injektiv (alle Urnen ≤ 1 Bälle)	surjektiv (alle Urnen ≥ 1 Bälle)	bijektiv (alle Urnen $= 1$ Bälle)
Bälle untersch., Urnen untersch.	m^n	$m^{\underline{n}}$	$m! \cdot S_{n,m}$	$n!$ falls $m = n$ 0 sonst
Bälle nicht unt., Urnen untersch.	$\binom{n+m-1}{m-1}$	$\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{m-1}$	1 falls $m = n$ 0 sonst
Bälle untersch., Urnen nicht unt.	$\sum_{k=1}^{m} S_{n,k}$	1 falls $m \geq n$ 0 sonst	$S_{n,m}$	1 falls $m = n$ 0 sonst
Bälle nicht unt., Urnen nicht unt.	$\sum_{k=1}^{m} P_{n,k}$	1 falls $m \geq n$ 0 sonst	$P_{n,m}$	1 falls $m = n$ 0 sonst

Aufgabe: mn Objekte sollen so in m Kisten verteilt werden, daß jede Kiste genau n der Objekte enthält. Auf wieviele Arten geht dies, wenn

a) die Objekte und die Kisten unterscheidbar sind,

b) nur die Objekte unterscheidbar sind, bzw.

c) weder die Objekte noch die Kisten unterscheidbar sind.

Beispiel: $m = 2, n = 2$

a) Die Objekte seien die Zahlen 1,2,3,4. Die Kisten seien K_1 und K_2. Ausprobieren führt zu folgenden Möglichkeiten:

K_1: 1,2 K_2: 3,4
K_1: 1,3 K_2: 2,4
K_1: 1,4 K_2: 2,3
K_1: 2,3 K_2: 1,4
K_1: 2,4 K_2: 1,3
K_1: 3,4 K_2: 1,2

b) Die Objekte seien wieder die Zahlen 1,2,3,4. Da die Kisten nicht unterscheidbar sind, besteht die Aufteilung jetzt nur aus einer Aufteilung der Objekte in zwei Klassen mit je zwei Elementen. Also:

1,2 | 3,4
1,3 | 2,4
1,4 | 2,3

c) Die vier Objekte seien a, a, a und a. Es gibt also nur eine Aufteilung der Objekte in zwei Klassen mit je zwei Elementen:

$$a, a \mid a, a$$

Aufgabe: Drei verschiedenfarbige Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wieviele verschiedene Ergebnisse gibt es?

Aufgabe: Drei identische (ununterscheidbare) Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wieviele verschiedene Ergebnisse gibt es?

Aufgabe: Achtzehn verschiedenfarbige Bälle sollen so in sieben ununterscheidbare Urnen plaziert werden, daß jede Urne mindestens einen Ball enthält. Wieviele Möglichkeiten gibt es?

Aufgabe: Auf wieviel Arten können zehn verschiendende Jobs auf vier Rechner verteilt werden, so daß der rechenaufwendigste Job dem schnellsten Rechner zugeordnet wird und jeder Rechner mindestens einen Job erhält?