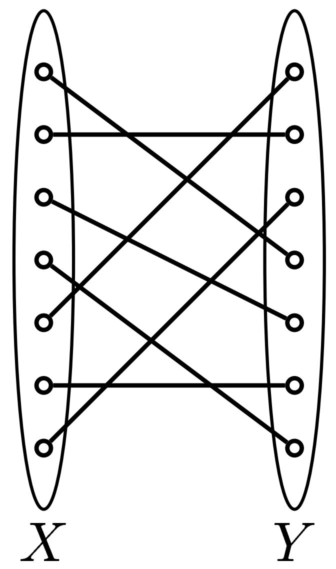
Anzahl Abbildungen

1. Bijektive Abbildungen $f : X \to Y$



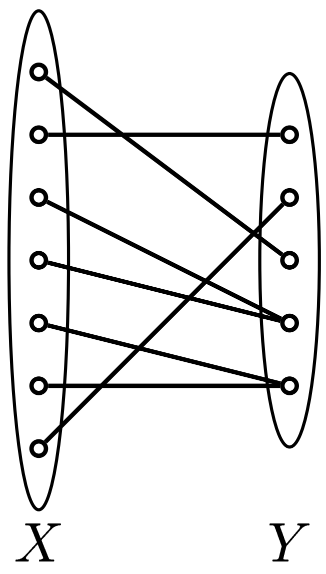
Es muss gelten: $|X| = |Y|$.

Bijektive Abbildungen $f : X \to X$ nennt man auch *Permutationen*

Beispiel: $X = [n]$

- Es gibt genau $n!$ Permutationen $\pi : [n] \to [n]$.
- Es gibt genau $(n-k)!$ Permutationen $\pi : [n] \to [n]$ für die genau k Werte $\pi(v_1), \ldots, \pi(v_k)$ vorgegeben sind.

2. Surjektive Abbildungen $f : X \to Y$



Es muss gelten: $|X| \geq |Y|$.

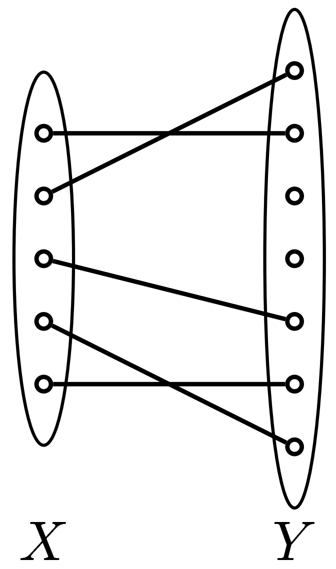
Beispiel: $X = [m], Y = [n]$ mit $m \geq n$

- Es gibt genau $S_{m,n} \cdot n!$ surjektive Abbildungen $\pi : [m] \to [n]$.

Zur Erinnerung:

- $S_{n,k}$ sind die *Stirlingzahlen 2. Art*

3. Injektive Abbildungen $f : X \to Y$



Es muss gelten: $|X| \geq |Y|$.

Beispiel: $X = [k], Y = [n]$ mit $k \leq n$

- Es gibt genau $n^{\underline{k}}$ injektive Abbildungen $\pi : [k] \to [n]$.

Zur Erinnerung:

- $n^{\underline{k}}$ bezeichnet die fallende Faktorielle von n der Länge k:

$$n^{\underline{k}} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Aufgabe: Drei verschiedenfarbige Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wieviele verschiedene Ergebnisse gibt es?

Aufgabe: Achtzehn verschiedenfarbige Bälle sollen so in sieben ununterscheidbare Urnen plaziert werden, daß jede Urne mindestens einen Ball enthält. Wieviele Möglichkeiten gibt es?

Aufgabe: Auf wieviel Arten können zehn verschiendene Jobs auf vier Rechner verteilt werden, so daß der rechenaufwendigste Job dem schnellsten Rechner zugeordnet wird?

Zur Erinnerung: "*Ball-and-Bins Schema*"

Einige Zählaufgaben im Zusammenhang mit Graphen

- Wieviele Hamiltonkreise enthält der vollständige Graph K_n ?

  $\frac{1}{2}(n-1)!$ viele

- Wieviele verschiedene Pfade der Länge k (mit k Kanten) enthält der vollständige Graph K_n ?

  $\frac{1}{2}n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k) = \frac{1}{2}n^{\underline{k+1}}$ viele

- Wieviele verschiedene Kreise der Länge k enthält der vollständige Graph K_n ?

  $\frac{1}{2k}n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{1}{2k}n^{\underline{k}}$ viele

  Spezialfall: Hamiltonkreis (= Kreis der Länge n): s.o.

- Wieviele verschiedene perfekte Matchings enthält der vollständige Graph K_n ?

  $\dfrac{n!}{2^{n/2} \cdot (\frac{n}{2})!}$ viele

  Variante: Wieviele verschiedene perfekte Matchings enthält der vollständige bipartite Graph $K_{n,n}$?

  $n!$ viele

- Wieviele verschiedene spannende Bäume enthält der vollständige Graph K_n ?

  n^{n-2} viele

  Zur Erinnerung: Satz von Cayley

Aufgabe: Beweisen oder widerlegen Sie: Jeder hamiltonsche 3-reguläre Graph $G = (V, E)$ hat chromatischen Index 3.

Zur Erinnerung:

- Ein *Hamiltonkreis* in einem Graphen ist ein Kreis, der jeden Knoten des Graphen genau einmal enthält.
- Ein Graph heisst *hamiltonsch*, falls er einen Hamiltonkreis enthält.
- Ein Graph heisst *3-regulär*, falls alle Knoten Grad genau 3 haben.
- Eine *Kantenfärbung* eines Graphen $G = (V, E)$ mit k Farben ist eine Abbildung $c : E \to \{1, 2, \ldots, k\}$, so dass je zwei inzidente Kanten verschieden gefärbt sind.
- Der *chromatische Index* eines Graphen ist die kleinste natürliche Zahl k, für die es eine Kantenfärbung von G mit k Farben gibt.

Lösung:

- Sei C ein Hamiltonkreis in G. Setze $X := E \setminus C$.
- Da G nach Annahme 3-regulär ist und der Hamiltonkreis C offenbar 2-regulär ist, gilt: X ist ein perfektes Matching!
- D.h., alle Kanten in X können mit der gleichen Farbe gefärbt werden.
- Nun überlegen wir noch, dass für die Kanten in C zwei weitere Farben ausreichen. Dies gilt da die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad in jedem Graphen gerade ist (Wieso!?)!
- **Fertig!**

Aufgabe: 14 Stühle stehen in einer Reihe. Auf wieviele verschiedenene Arten können sich Personen so darauf setzen, dass zwischen je zwei Personen mindestens ein leerer Stuhl ist?

Lösung:

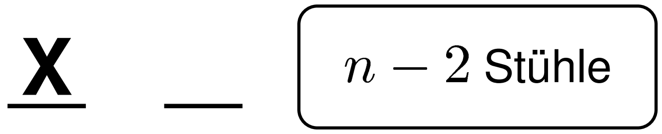
Es sei $f(n)$:= Anzahl Möglichkeiten für n Stühle.

Klar: $f(1) = 2$ (keine Person oder eine Person) und
$f(2) = 3$ (keine Person oder eine Person auf einem der beiden Stühle)

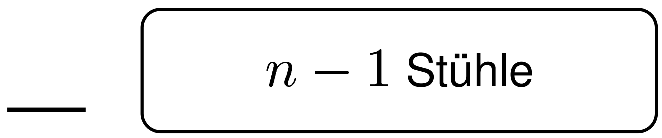
IDEE: Stelle eine Rekursionsgleichung auf!

Betrachte den Stuhl ganz links. Wir unterscheiden die beiden Fälle:

1.) Dort sitzt eine Person. Dann muss der Stuhl daneben leer sein. D.h., die Möglichkeiten hierfür entsprechen den Anzahl Möglichkeiten für $n-2$ Stühle:



2.) Dort sitzt keine Person. Die Möglichkeiten hierfür entsprechen dann den Anzahl Möglichkeiten für $n-1$ Stühle:



Es gilt also: $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ für alle $n \geq 3$ und $f(1) = 2$, $f(2) = 3$.

<u>VERWENDE MAPLE:</u>

```
>   f := unapply(rsolve({f(n)=f(n-1)+f(n-2), f(1)=2,
f(2)=3}, f), n);
```

$$f := n \to \frac{\left(-\frac{1}{5}\sqrt{5}-1\right)\left(-2\,\frac{1}{1-\sqrt{5}}\right)^n}{1-\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}-1\right)\left(-2\,\frac{1}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1+\sqrt{5}}$$

```
>   evalf(f(14));
```

$$986.9999945$$

<u>Die gesuchte Antwort lautet also 987.</u>

Aufgabe: Wieviele Worte der Länge 10 über dem Alphabet $\{0, 1, 2\}$ gibt es, die keine drei aufeinanderfolgende Nullen enthalten.

<u>**Lösung:**</u>

Es sei $f(n)$:= Anzahl solcher Worte der Länge n.

Klar: $f(1) = 3$ (0, 1, 2)
$f(2) = 9$ (00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22)
$f(3) = 26$ (001, . . ., 222)

IDEE: Stelle eine Rekursionsgleichung auf!

Betrachte erstes Zeichen. Wir unterscheiden drei Fälle:

1.) Erstes Zeichen ist eine 1 oder eine 2. Dann müssen die verbleibenden $n - 1$ Zeichen ein Wort ohne drei aufeinanderfolgende Nullen sein.

2.) Erstes Zeichen ist eine 0, zweites Zeichen ist eine 1 oder eine 2. Dann müssen die verbleibenden $n - 2$ Zeichen ein Wort ohne drei aufeinanderfolgende Nullen sein.

3.) Erstes und zweites Zeichen ist eine 0. Dann muss das dritte Zeichen eine 1 oder eine 2 sein und die verbleibenden $n - 3$ Zeichen ein Wort ohne drei aufeinanderfolgende Nullen.

Es gilt also:
$f(n) = 2f(n-1) + 2f(n-2) + 2f(n-3)$ für alle $n \geq 4$
und $f(1) = 3$, $f(2) = 9$, $f(3) = 26$.

Verwende Maple:

```
>  f := unapply(rsolve({f(n)=2*f(n-1)+2*f(n-2)+2*f(n-3),
f(1)=3, f(2)=9, f(3)=26}, f), n);
```

$$f := n \to \sum_{\_R=\mathrm{RootOf}(-1+2\,\_Z+2\,\_Z^2+2\,\_Z^3)} \left(-\frac{\left(\lim\limits_{z \to \_R} -\frac{(z-\_R)\,(z+z^2+1)}{-1+2\,z+2\,z^2+2\,z^3}\right)\left(\frac{1}{\_R}\right)^n}{\_R} \right)$$

```
>  evalf(f(10));
```

$$47088.00000$$

Die gesuchte Antwort lautet also 47088.

Aufgabe: 14 Stühle stehen in einer Reihe. Auf wieviele verschiedenene Arten können sich eine *gerade* Anzahl von Personen darauf setzen?

Lösung:

Es sei $g(n)$:= Anzahl solcher Möglichkeiten für n Stühle.

Klar: $g(1) = 1$ (keine Person) und
$g(2) = 2$ (keine Person oder zwei Personen)

Wichtig: Bezeichnen wir mit $u(n)$ die Anzahl Möglichkeiten auf n Stühle eine *ungerade* Anzahl von Personen zu setzen, so muss gelten:

$$g(n) + u(n) = 2^n. \qquad \text{(Warum?!)}$$

$\textsc{Idee}$: Stelle eine Rekursionsgleichung auf!

Betrachte den Stuhl ganz links. Wir unterscheiden die beiden Fälle:

1.) Dort sitzt eine Person. Dann müssen auf den verbleibenden $n-1$ Stühlen eine ungerade Anzahl von Personen sitzen. D.h., hierfür gibt es $u(n-1) = 2^{n-1} - g(n-1)$ viele Möglichkeiten.

2.) Dort sitzt keine Person. Dann müssen auf den verbleibenden $n-1$ Stühlen eine gerade Anzahl von Personen sitzen. D.h., hierfür gibt es $g(n-1)$ viele Möglichkeiten.

Es gilt also:
$g(n) = (2^{n-1} - g(n-1)) + g(n-1) = 2^{n-1}$ für alle $n \geq 2$ und $g(1) = 1$.