- Eine Algebra $A = \langle S, \circ \rangle$ mit einem 2-stelligen Operator $\circ$ heisst **Halbgruppe**, falls

  $$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \qquad \text{für alle } a, b, c \in S$$

  (man sagt: $\circ$ ist *assoziativ*).

- Eine Algebra $A = \langle S, \circ \rangle$ mit einem 2-stelligen Operator $\circ$ heisst **Monoid**, falls
  - $\circ$ assoziativ ist und
  - ein neutrales Element $e \in S$ besitzt.

- Eine Algebra $A = \langle S, \circ \rangle$ mit einem 2-stelligen Operator $\circ$ heisst **Gruppe**, falls
  - $\circ$ assoziativ ist,
  - ein neutrales Element $e \in S$ besitzt und
  - es zu jedem Element $a \in S$ ein Inverses gibt.

- Eine Halbgruppe (ein Monoid, eine Gruppe) heisst **abelsch**, falls

  $$a \circ b = b \circ a \qquad \text{für alle } a, b \in S$$

  (man sagt: $\circ$ ist *kommutativ*).

Eine Algebra $A = \langle S, \oplus, \odot \rangle$ mit zwei zweistelligen Operatoren $\oplus$ und $\odot$ heisst *Ring* (engl. *ring*), falls

R1. $\langle S, \oplus \rangle$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $0 \in S$ ist,

R2. $\langle S \setminus \{0\}, \odot \rangle$ ein Monoid mit neutralem Element $1 \in S$ ist und

R3. $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$ für alle $a, b, c \in S$
$(b \oplus c) \odot a = (b \odot a) \oplus (c \odot a)$ für alle $a, b, c \in S$,
(man sagt: $\oplus$ und $\odot$ sind *distributiv*).

Eine Algebra $A = \langle S, \oplus, \odot \rangle$ mit zwei zweistelligen Operatoren $\oplus$ und $\odot$ heisst *Körper* (engl. *field*), falls

K1. $\langle S, \oplus \rangle$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $0 \in S$ ist,

K2. $\langle S \setminus \{0\}, \odot \rangle$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $1 \in S$ ist und

K3. $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$ für alle $a, b, c \in S$.

Eine Algebra $A = \langle S, \oplus, \odot, \neg \rangle$ mit zwei zweistelligen Operatoren $\oplus$ und $\odot$ und einem einstelligen Operator $\neg$ heisst **Boolesche Algebra**, falls

B1. $\langle S, \oplus \rangle$ ein abelsches Monoid mit neutralem Element $0 \in S$ ist,

B2. $\langle S, \odot \rangle$ ein abelsches Monoid mit neutralem Element $1 \in S$ ist,

B3. für den Operator $\neg$ gilt:

$$a \oplus (\neg a) = 1 \qquad \text{für alle } a \in S \text{ und}$$
$$a \odot (\neg a) = 0 \qquad \text{für alle } a \in S$$

B4. das Distributivgesetz gilt, d.h.

$$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c) \qquad \text{für alle } a, b, c \in S \text{ und}$$
$$a \oplus (b \odot c) = (a \oplus b) \odot (a \oplus c) \qquad \text{für alle } a, b, c \in S.$$

Eigenschaften Boolescher Algebren

Für alle Elemente $b, c \in S$ gilt:

1. Idempotenz:

$$b \oplus b = b \qquad \text{und} \qquad b \odot b = b$$

2. Nullelement:

$$b \oplus 1 = 1 \qquad \text{und} \qquad b \odot 0 = 0$$

3. Absorption:

$$b \oplus (b \odot c) = b \qquad \text{und} \qquad b \odot (b \oplus c) = b$$

4. Kürzen:

$$(b \oplus c = b \oplus d) \wedge (\neg b \oplus c = \neg b \oplus d) \quad \Longleftrightarrow \quad c = d$$
$$(b \odot c = b \odot d) \wedge (\neg b \odot c = \neg b \odot d) \quad \Longleftrightarrow \quad c = d$$

5. eindeutiges Komplement:

$$b \oplus c = 1 \ \wedge \ b \odot c = 0 \iff c \ = \ \neg b$$

6. Involution:

$$\neg(\neg b) = b$$

7. Konstante:

$$\neg 0 = 1 \qquad \neg 1 = 0$$

8. De-Morgan-Regeln:

$$\neg(b \oplus c) = \neg b \odot \neg c \qquad \text{und} \qquad \neg(b \odot c) = \neg b \oplus \neg c$$