Zur Erinnerung: Ziehen von Elementen aus einer Menge

	geordnet	ungeordnet
mit zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
ohne zurücklegen	$n^{\underline{k}}$	$\binom{n}{k}$

Aufgabe: Zehn Delegierte wollen aus ihren Reihen einen dreiköpfigen Vorstand wählen; zwei der Delegierten sind sich jedoch spinnefeind und können nicht gemeinsam in den Vorstand gewählt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, den Vorstand zu besetzen?

Aufgabe: Wieviel Möglichkeiten gibt es $n-5$ schwarze und 5 weisse Türme so auf einem $n \times n$ Schachfeld aufzustellen, dass keine zwei Türme sich gegenseitig schlagen können?

Aufgabe: Wieviel verschiedene Lösungen hat die Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ mit $x_i \in \mathbb{N}$?

Aufgabe: Wieviel verschiedene Lösungen hat die Gleichung $x_1 + 2x_2 + x_3 = 15$ mit $x_i \in \mathbb{N}$?

Aufgabe: Wieviele verschiedene Worte der Länge 6 kann man aus den Buchstaben des Worte AMMERSEE bilden?

Aufgabe: Drei verschiedenfarbige Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wieviele verschiedene Ergebnisse gibt es?

Aufgabe: Achtzehn verschiedenfarbige Bälle sollen so in sieben ununterscheidbare Urnen plaziert werden, dass jede Urne mindestens einen Ball enthält. Wieviele Möglichkeiten gibt es?

Aufgabe: Auf wieviel Arten können zehn verschiendene Jobs auf vier Rechner verteilt werden, so dass der rechenaufwendigste Job dem schnellsten Rechner zugeordnet wird?

Zur Erinnerung: "*Ball-and-Bins Schema*"

Aufgabe: Wir bezeichnen mit $\hat{S}_{n,k}$ die Anzahl der Partitionen einer n-elementigen Menge in k Klassen, so dass jede Klasse mindestens zwei Elemente enthält. Bestimmen Sie eine Rekursionsgleichung für die Zahlen $\hat{S}_{n,k}$.

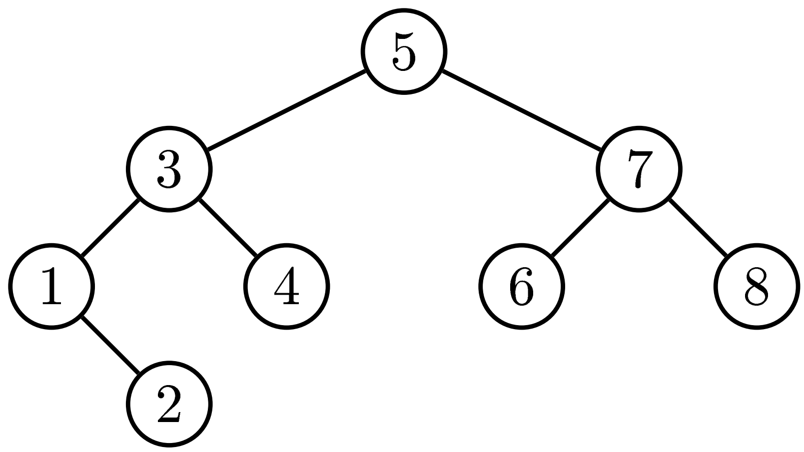
Aufgabe: Gegeben sei die folgende Rekursionsgleichung:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2 \qquad (n \geq 2).$$

Bestimmen Sie eine explizite Darstellung für a_n.

Aufgabe: Wieviele binäre Suchbäume auf der Menge der Knoten $1, 2, \ldots, n$ gibt es?

Def: Ein binärer Suchbäume ist ein Baum mit einem ausgezeichneten Knoten, der **Wurzel**, und der zusätzlichen Eigenschaft, dass alle für alle Knoten des Baumes gilt: alle Kinder im linken Unterbaum des Knotens haben eine kleiner Markierung als der Knoten selbst und alle Kinder im rechten Unterbaum haben eine grössere Markierung.



Zur Erinnerung: Die Catalanzahlen C_n sind definiert durch:

C_n :=Anzahl legaler Klammerungen von $2n$ Klammerpaaren.

Wir haben gezeigt: Die Catalanzahlen genügen der Rekursionsgleichung

$$C_1 = 1, \quad C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} C_{n-k} \quad (n \geq 2)$$

und haben die explizite Darstellung

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Aufgabe: Es sei $T = (V, E)$ ein Baum mit $deg(v) \in \{1, 6\}$ für alle $v \in V$. Zeige, dass T mindestens $\frac{4}{5}|V|$ viele Blätter enthält.

Zur Erinnerung: $2|E| = \sum_{v \in V} deg(v)$.

Def. Ein Graph $G = (V, E)$ heisst **beinahe planar**, falls es einen Knoten $v \in V$ gibt, so dass $G - v$ planar ist.

Aufgabe: Zeige, dass für jeden beinahe planaren Graphen $G = (V, E)$ gilt:
a) $|E| \leq 4|V| - 10$,
b) $\exists w \in V$ mit $deg(w) \leq 6$

Zur Erinnerung: Für planare Graphen gilt:
a) $|E| \leq 3|V| - 6$ und b) $\exists w \in V$ mit $deg(w) \leq 5$.

Aufgabe: Es sei $G = (A \cup B, E)$ ein k-regulärer bipartiter Graph. Wir konstruieren daraus einen Graphen wie folgt: Jeden Knoten in A verbinden wir mit einem neuen Knoten s und jeden Knoten in B verbinden wir mit einem neuen Knoten t. Zeige, dass es in diesem Graphen genau $deg(s)$ viele paarweise kantendisjunkte s-t Pfade gibt.

Zur Erinnerung: Jeder k-reguläre bipartite Graph enthält ein perfektes Matching.