Ein **Graph** G ist ein Tupel $G = (V, E)$, wobei

V (endliche) Menge der **Knoten**,

$E \subseteq \binom{V}{2}$ Menge der **Kanten**

BEISPIELE:

- vollstndige Graphen

  $K_n = (V, \binom{V}{2})$, wobei $|V| = n$

- bipartite Graphen

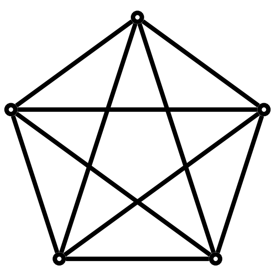
  $G = (A \uplus B, E)$, wobei $E \subseteq A \times B$

- vollstndige bipartite Graphen

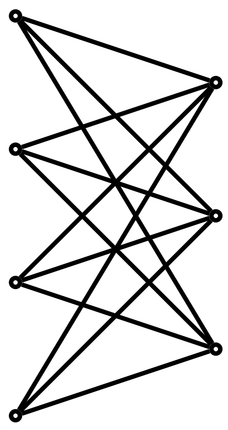
  $K_{n_1,n_2} = (A \uplus B, A \times B)$, wobei $|A| = n_1, |B| = n_2$

- vollstndige k-partite Graphen

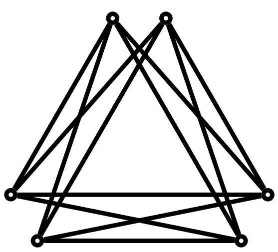
  $K_{n_1,\ldots,n_r} = (V_1 \uplus \ldots \uplus V_r, \bigcup_{i<j} V_i \times V_j)$, wobei $|V_i| = n_i$



K_5



$K_{4,3}$



$K_{2,2,2}$

Nachbarschaft eines Knoten $v \in V$:

$$\Gamma(v) = \{w \in V \mid \{v,w\} \in E\}$$

Grad eines Knoten $v \in V$:

$$deg(v) = |\Gamma(v)|$$

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt k**-regulr**, falls

$$deg(v) = k \qquad \text{fr alle } v \in V$$

Weg der Lnge k:

$v_0, v_1, \ldots, v_k$ mit $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ fr alle $i = 0, \ldots, k-1$

Pfad der Lnge k:

Weg der Lnge k, wobei zustzlich gilt:

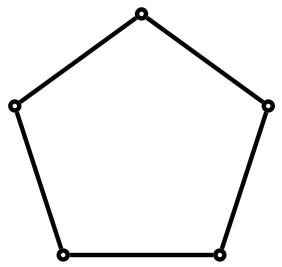
die v_i sind paarweise verschieden

Ein x-y **Pfad** ist ein Pfad mit **Anfangsknoten** $v_0 = x$

und **Endknoten** $v_k = y$

Kreis der Lnge k:

Pfad der Lnge k, wobei zustzlich $\{v_0, v_k\} \in E$.



C_5

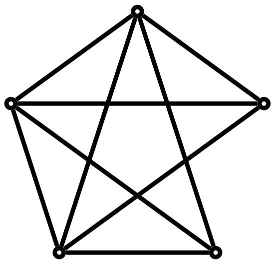
Ein Graph $G = (V, E)$ heißt **zusammenhngend**, falls

fr alle Paare $u, v \in V$ ein u-v Pfad existiert

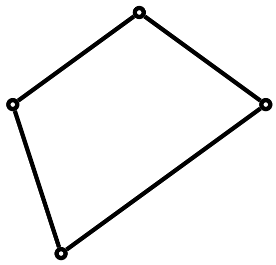
Ein Graph $H = (V_H, E_H)$ heit (schwacher) Subgraph
eines Graphen $G = (V_G, E_G)$ falls

$$V_H \subseteq V_G \quad \text{und} \quad E_H \subseteq E_G$$

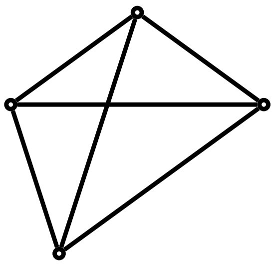
gilt.
Gilt sogar $E_H = E_G \cap \binom{V_H}{2}$ so nennt man H einen **induzierten Subgraphen** von G und schreibt $H = G[V_H]$.



G



schwacher
Subgraph



induzierter
Subgraph

Sei $\biguplus_{i=1}^{k} V_i$ eine Partition von V, so daß gilt

fr Knoten $x, y \in V$ existiert genau dann ein x-y Pfad,
falls x und y in der selben Klasse der Partition liegen.

Die Subgraphen $G[V_i]$ nennt man die **Komponenten** von G.

Ein **Baum** ist ein zusammenhngender, kreisfreier Graph.

Ein **Wald** ist ein Graph, dessen Komponenten Bume sind.

Lemma: Sei $T = (V, E)$ ein Baum, $v \in V$ ein beliebiger Knoten und $T_1, \ldots, T_k$ die Komponenten von $T[V \setminus \{v\}]$. Dann sind die Komponenten $T_1, \ldots, T_k$ Bume und $\deg(v) = k$.

Lemma: Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhngender Graph und C ein Kreis in G. Dann gilt fr alle $e \in E(C)$:

$G_e := (V, E \setminus \{e\})$ ist zusammenhngend.

Korollar: Ist $T = (V, E)$ ein Baum, dann gilt

$$|E| = |V| - 1.$$

Korollar: Jeder Baum $T = (V, E)$ ($|V| \geq 2$) enthlt mindestens zwei Bltter.

Sei $G = (V_G, E_G)$ ein Graph. Ein Graph $T = (V_T, E_T)$ heit **spannender Baum** in G, falls gilt

1. T ist ein Baum und
2. $V_T = V_G$ und $E_T \subseteq E_G$.

Satz: Jeder zusammenhngende Graph $G = (V, E)$ enthlt einen spannenden Baum.

Satz: Ein zusammenhngender Graph $G = (V, E)$ mu mindestens $|E| \geq |V| - 1$ Kanten enthalten und jeder Graph, fr den $|E| > \binom{|V|-1}{2}$ ist, ist zusammenhngend.