Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Angelika Steger

WS 1999/2000
Übungsblatt 8
13. Januar 2000

Diskrete Strukturen I

Abgabetermin	Computeraufgaben:	Freitag, 21. Januar 1999
	Hausaufgaben:	Mittwoch, 26. Januar 1999

Tutoraufgabe 1

Das *Münzwechselproblem*: Gegeben sind m Münzen mit Werten $c_1, \dots, c_m$, $c_i \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie (falls möglich) für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen $k_1, \dots .k_m$ mit $\sum_{i=1}^{m} k_i c_i = n$ und $\sum k_i$ minimal.

(a) Diskutieren Sie verschiedene Strategien zur Lösung des Münzwechselproblems.

(b) Zeigen Sie, dass für Werte $c_i = b^{i-1}$, $b \in \mathbb{N}$, $b > 1$, der Greedy Algorithmus, der immer zunächst möglichst viele schwere Münzen nimmt, bevor er leichtere betrachtet, die optimale Lösung liefert.

Tutoraufgabe 2

Wir betrachten eine modifizierte Version des Rucksackproblems aus der Vorlesung, indem wir nicht nur über ein sondern über beliebig viele Exemplare von jedem Objekt verfügen.
Für die Packung wird folgende Greedy Strategie verwendet. Die Objekte werden nach dem fallenden Wert von p_i/w_i (d.h. zunächst das Objekt mit maximalem Wert von p_i/w_i) sortiert. Im ersten Schritt kommen in den Rucksack möglichst viele Objekte mit dem maximalen Wert von p_i/w_i, dann möglichst viele Objekte mit dem nächstkleineren Wert von p_i/w_i, usw.
Zeigen Sie, dass dann für den Profit der gelieferten Packung P gilt: $P \geq \frac{1}{2} P_{\text{opt}}$, wobei P_{opt} der Profit der optimalen Packung ist.

Hausaufgabe 1 (10 Punkte)

Seien $x = x_1, \dots, x_r$ und $y = y_1, \dots, y_s$ zwei Folgen. Eine eine Folge $z = z_1, \dots, z_t$ heißt *Teilfolge* von x, wenn eine Folge von Indizes $i_1 < i_2 < \dots < i_t$ existiert, sodass $z_j = x_{i_j}$ für $1 \leq j \leq t$. Eine *längste gemeinsame Teilfolge* von x und y ist eine Folge z maximaler Länge, die eine Teilfolge von x

und von y ist. Z.B. $2, 3, 2, 1$ ist die längste gemeinsame Teilfolge von $x = 1, 2, 3, 2, 4, 1, 2$ und $y = 2, 4, 3, 1, 2, 1$.
Schreiben Sie ein Programm (Programmiersprachen wie gehabt), das aus dem File `lgt.in` (kann von der WWW Seite heruntergeladen werden) zwei Folgen einliest und eine längste gemeinsame Teilfolge ausgibt. Das File `lgt.in` enthält zwei Zeilen mit den Eingabefolgen. Diese bestehen aus natürlichen Zahlen, die jeweils durch ein Leerzeichen getrennt sind. Die Ausgabe besteht aus einer Zeile, in der die durch jeweils ein Leerzeichen getrennte Glieder der Teilfolge stehen. Falls keine gemeinsame Teilfolge existiert, wird die leere Zeile ausgegeben.

Hausaufgabe 2 (10 Punkte)

Geben Sie die explizite Lösung der Rekursionsgleichung

$$\begin{aligned} g_0 &= g_1 = 0 \\ g_n &= 5g_{n-1} - 6g_{n-2} + n + 1, \qquad \text{für } n \geq 2 \end{aligned}$$

an.

Computeraufgabe 1 (10 Punkte)

Allgemeine Form: Seien $S_{n,k}$ die Stirling Zahlen zweiter Art. Sie erfüllen die Rekursion

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}. \tag{1}$$

Bestimmen Sie die Anzahl der Additionen (Indexoperationen werden nicht mitgezählt), die benötigt werden, um $S_{n,k}$ wie in (1) angegeben rekursiv auszurechnen.

Computeraufgabe 2 (10 Punkte)

Allgemeine Form: Sei $S_{n,k}$ wie oben. Bestimmen Sie die Anzahl der Additionen (Indexoperationen werden nicht mitgezählt), die benötigt werden, um $S_{n,k}$ effizient mit Hilfe der dynamischen Programmierung auszurechnen.