Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Angelika Steger

WS 1999/2000
Übungsblatt 9
24. Januar 2000

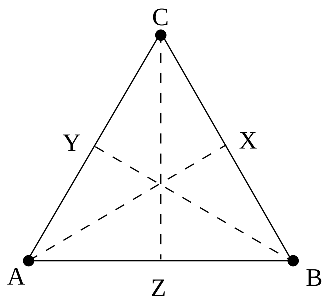
Diskrete Strukturen I

Abgabetermin	Computeraufgaben:	Freitag, 28. Januar 1999
	Hausaufgaben:	Mittwoch, 2. Februar 1999

Tutoraufgabe 1

(a) Zeigen Sie, dass jede endliche Gruppe zu einer Untergruppe der Permutationsgruppe S_n isomorph ist.

(b) Sei H die durch Rotationen (um den Mittelpunkt) und Spiegelungen (um die Höhe) erzeugte Untergruppe aller bijektiven Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die das gleichseitige Dreieck



wieder in sich überführen (ohne Berücksichtigung der Markierungen).

Bestimmen Sie eine Untergruppe der Permutationsgruppe, die zu H isomorph ist.

Tutoraufgabe 2

Beweisen Sie, dass die Permutationsgruppe S_n durch Permutationen (zyklenschreibweise)

$$(1,2),(2,3),\dots,(n-1,n)$$

erzeugt wird.

Hausaufgabe 1 $(2 + 1 + 3 + 4$ Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} = O(3^{g(n)})$;

(b) Die Funktion

$$f(n) = \begin{cases} 0 & n \text{ prim} \\ 1000n & \text{sonst} \end{cases}$$

ist $\Omega(\frac{n}{2})$;

(c) $1000 \log_{10} n = O(n^2)$. Falls diese Beziehung richtig ist, bestimmen Sie die Konstanten C und n_0 aus der Definition von O (s. Skript, S. 10);

(d) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \Theta(\ln n)$.

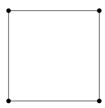
Hausaufgabe 2 $(3 + 1 + 3 + 3$ Punkte)

Sei $\circ$ die Verknüpfung (Hintereinanderausführung) zweier Funktionen oder Abbildungen. Welche algebraische Struktur (Algebra, Monoid, usw.) besitzen folgende Objekte:

(a) die Menge aller injektiven/surjektive/bijektiven Funktionen von A nach A mit $\circ$ als Verknüpfung, A ist eine Menge;

(b) die Menge aller Vektoren in $\mathbb{R}^n$ mit Vektoraddition;

(c) Sei H die durch Rotationen (um den Mittelpunkt) und Spiegelungen (um die vertikale und horizontale Achse und um Diagonalen) erzeugte Untergruppe aller bijektiven Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die das Quadrat



wieder in sich überführen, d.h. das Ergebnis ist wieder das obige Quadrat (ohne Berücksichtigung der Markierungen). Wieviele Elemente besitzt diese Struktur?

(d) die Menge aller $n \times n$ Matrizen über $\mathbb{R}$?

Computeraufgabe 1 (10 Punkte)

Allgemeine Form: Wieviele Elemente besitzt die durch Permutationen (zyklenschreibweise mit Kommas) (1,2), (3,4), ..., ($n-1$,n) in S_n erzeugte Untergruppe?

Computeraufgabe 2 (10 Punkte)

Welche der folgenden Beziehungen sind in S_{10} korrekt (zyklenschreibweise mit Kommas)?

(a)

$$[(1,2,3)(4,6,8)(5)(7)(9)(10)] \circ [(2,9,10)(1)(3)(4)(5)(6)(7,8)]^{-1} \\ = (1,10,9,2,3)(4,6,7,5)(8)$$

(b) $[(2,9,10)(1,3)(4)(5,7,8)(6)]^2 = (2,10,9)(5,8,7)(1)(3)(4)(6).$