Satz: Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann durch einen regulären Ausdruck darstellbar, wenn sie regulär ist.

Beweis: "$\Longrightarrow$" vgl. Vorlesung am Mittwoch

"$\Longleftarrow$" Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_1, E)$ ein deterministischer endlicher Automat. Wir zeigen: es gibt einen regulären Ausdruck γ mit $L(M) = L(\gamma)$.

O.E. sei $Z = \{z_1, \ldots, z_n\}$. Wir setzen

$R_{ij}^k := \{x \in \Sigma^* \mid$ die Eingabe x überführt den im Zustand z_i gestarteten Automaten in den Zustand z_j, wobei alle zwischendurch durchlaufenen Zustände einen Index kleiner gleich k haben $\}$

Beh.: Für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ und alle $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ gilt: Es gibt einen regulären Ausdruck α_{ij}^k mit $L(\alpha_{ij}^k) = R_{ij}^k$.

Bew.: Induktion über k:

$k = 0$: Hier gilt

$$R_{ij}^0 := \begin{cases} \{a \in \Sigma \mid \delta(z_i, a) = z_j\}, & \text{falls } i \neq j \\ \{a \in \Sigma \mid \delta(z_i, a) = z_j\} \cup \{\epsilon\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

D.h., R_{ij}^0 ist endlich und läßt sich daher durch einen regulären Ausdruck α_{ij}^0 beschreiben.

$k \Rightarrow k+1$: Hier gilt

$$R_{ij}^{k+1} = R_{ij}^{k} \cup R_{i\,k+1}^{k}(R_{k+1\,k+1}^{k})^{*} R_{k+1\,j}^{k}$$

und daher

$$\alpha_{ij}^{k+1} = (\alpha_{ij}^{k} \mid \alpha_{i\,k+1}^{k}(\alpha_{k+1\,k+1}^{k})^{*}\alpha_{k+1\,j}^{k})$$

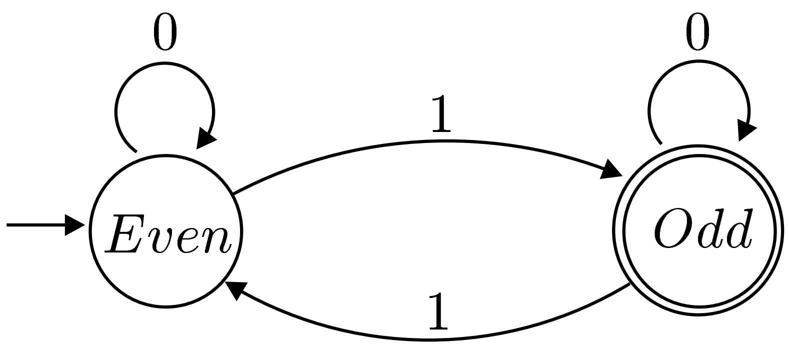
Somit gilt: $L(M) = (\alpha_{i\,e_1}^{n} \mid \alpha_{i\,e_2}^{n} \mid \cdots \mid \alpha_{i\,e_r}^{n})$, wobei $e_1, \ldots, e_r$ die Indizes der Endzustände seien.

$\square$

ALGORITHMISCHE BERECHNUNG: $\longrightarrow$ dynamische Programmierung

BEISPIEL: L := Menge aller Worte über $\{0, 1\}$, die eine ungerade Anzahl Einsen enthalten.

deterministischer endlicher Automat:



Satz: (Pumping Lemma, uvw Theorem)

Sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß es für jedes Wort $x \in L$ mit $|x| \geq n$ eine Zerlegung $x = uvw$ gibt, so daß

1. $|v| \geq 1$,
2. $|uv| \leq n$,
3. für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt: $uv^iw \in L$.