Definition. Ein *nichtdeterministischer Kellerautomat* (englisch: pushdown automata, kurz PDA) wird durch ein 6-Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ beschrieben, das folgende Bedingungen erfüllt:

- Z ist eine endliche Menge von *Zuständen*.
- Σ ist eine endliche Menge, das *Eingabealphabet*.
- Γ ist eine endliche Menge, das *Kelleralphabet*.
- $\delta : Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to \langle$endliche Teilmengen von $Z \times \Gamma^*\rangle$, die *Übergangsfunktion*.
- $z_0 \in Z$ ist der *Startzustand*.
- $\# \in \Gamma$ ist das *unterste Kellerzeichen*.

Intuitiv bedeutet $\delta(z, a, A) \ni (z', B_1 \ldots B_k)$:

Wenn sich M im Zustand z befindet und das oberste Zeichen des Kellers ein A ist, kann man durch Lesen des Eingabezeichens a in den Zustand z' übergehen, wobei das Zeichen A des Kellers durch $B_1 \ldots B_k$ ersetzt wird.

Achtung: Es sind die folgenden Spezialfälle erlaubt:

$a = \varepsilon$, d.h., Kellerinhalt wird verändert <u>ohne</u>, daß ein Eingabezeichen gelesen wird.

$k = 0$, d.h., das Zeichen A des Kellers wird „gePOPt“.

Die von M *akzeptierte* Sprache $L(M)$ ist die Menge der Worte, für die es eine Folge von Übergängen gibt, so daß der Keller nach Abarbeiten des Wortes *leer* ist.

Satz. Ist $G = (V, \Sigma, S, P)$ eine kontextfreie Grammatik, so ist $M = (\{z\}, \Sigma, V \cup \Sigma, \delta, z, S)$ ein nichtdeterministischer Kellerautomat, wenn wir δ wie folgt definieren:

Für jede Regel $A \to \alpha$ setzen wir
$$\delta(z, \epsilon, A) \ni (z, \alpha).$$

Zusätzlich fügen wir für alle $a \in \Sigma$ noch ein:
$$\delta(z, a, a) \ni (z, \varepsilon).$$

Satz. Ist $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ ein nichtdeterministischer Kellerautomat, so ist $G = (V, \Sigma, S, P)$ eine kontextfreie Grammatik, wenn wir V und P wie folgt definieren:
$$V := \{S\} \cup Z \times \Gamma \times Z$$

und

$S \to [z_0, \#, z]$	für alle $z \in Z$
$[z, A, z'] \to a$	für alle Übergänge $\delta(z, A, a) \ni (z', \varepsilon)$
$[z, A, y] \to a[z', B, y]$	für alle Übergänge $\delta(z, A, a) \ni (z', B)$ <u>und</u> alle $y \in Z$
$[z, A, y'] \to a[z', B, y][y, C, y']$	für alle Übergänge $\delta(z, A, a) \ni (z', BC)$ <u>und</u> alle $y, y' \in Z$

[*Achtung:* Hier nehmen wir ohne Einschränkung (Wieso?!) an, daß es keine Übergänge $\delta(z, A, a) \ni (z', B_1 \dots B_k)$ mit $k \geq 3$ gibt.]

Beispiel: $S \to ab \mid aSb$ kontextfreie Grammatik

Konstruktion des Kellerautomaten:

- nur ein Zustand: z
- Kelleralphabet: $\{S, a, b\}$
- unterstes Kellerzeichen: S
- Definition von δ:
  Die Regel $S \to ab$ führt zu

$$\delta(z, \epsilon, S) \ni (z, ab). \tag{1}$$

Die Regel $S \to aSb$ führt zu

$$\delta(z, \epsilon, S) \ni (z, aSb). \tag{2}$$

Zusätzlich noch:

$$\delta(z, a, a) \ni (z, \varepsilon), \qquad \delta(z, b, b) \ni (z, \varepsilon). \tag{3}$$

Arbeitsweise bei Erkennung des Wortes $aabb$:

	ungelesene Zeichen der Eingabe	Kellerinhalt
Startzustand:	$aabb$	S
Regel (2):	$aabb$	aSb
Regel (3):	abb	Sb
Regel (1):	abb	abb
Regel (3):	bb	bb
Regel (3):	b	b
Regel (3):	ε	ε

Beispiel: Kellerautomat gegeben durch

$$\delta(z_0, a, \#) \ni (z_0, A\#),\ (z_1, A\#)$$
$$\delta(z_0, a, A) \ni (z_0, AA),\ (z_1, AA)$$
$$\delta(z_1, b, A) \ni (z_1, \varepsilon), \qquad \delta(z_1, \varepsilon, \#) \ni (z_1, \varepsilon)$$

Konstruktion einer Grammatik:

- neues Startsymbol: S
- Variablen: S und 8 Variablen der Form $[z_i, \#/A, z_j]$
- Produktionen für Startzustand:

$$S \to [z_0, \#, z_0] \mid [z_0, \#, z_1] \tag{1}$$

Produktionen für Übergang $\delta(z_1, b, A) \ni (z_1, \varepsilon)$:

$$[z_1, A, z_1] \to b \tag{2}$$

Produktionen für Übergang $\delta(z_1, \varepsilon, \#) \ni (z_1, \varepsilon)$:

$$[z_1, \#, z_1] \to \varepsilon \tag{3}$$

Produktionen für Übergang $\delta(z_0, a, \#) \ni (z_0, A\#)$:

$$[z_0, \#, z_0] \to a[z_0, A, z_0][z_0, \#, z_0]$$
$$[z_0, \#, z_1] \to a[z_0, A, z_0][z_0, \#, z_1]$$
$$[z_0, \#, z_0] \to a[z_0, A, z_1][z_1, \#, z_0]$$
$$[z_0, \#, z_1] \to a[z_0, A, z_1][z_1, \#, z_1]$$

Produktionen für Übergang $\delta(z_0, a, \#) \ni (z_1, A\#)$:

$$[z_0, \#, z_0] \to a[z_1, A, z_0][z_0, \#, z_0]$$
$$[z_0, \#, z_1] \to a[z_1, A, z_0][z_0, \#, z_1]$$
$$[z_0, \#, z_0] \to a[z_1, A, z_1][z_1, \#, z_0]$$
$$[z_0, \#, z_1] \to a[z_1, A, z_1][z_1, \#, z_1]$$

Analog für die beiden restlichen beiden Übergänge:

$$[z_0, A, z_0] \to a[z_1, A, z_0][z_0, A, z_0]$$
$$[z_0, A, z_1] \to a[z_0, A, z_0][z_0, A, z_1]$$
$$[z_0, A, z_0] \to a[z_0, A, z_1][z_1, A, z_0]$$
$$[z_0, A, z_1] \to a[z_0, A, z_1][z_1, A, z_1]$$
$$[z_0, A, z_0] \to a[z_0, A, z_0][z_0, A, z_0]$$
$$[z_0, A, z_1] \to a[z_1, A, z_0][z_0, A, z_1]$$
$$[z_0, A, z_0] \to a[z_1, A, z_1][z_1, A, z_0]$$
$$[z_0, A, z_1] \to a[z_1, A, z_1][z_1, A, z_1]$$