Die Klasse der *primitiv rekursiven Funktionen* (auf $\mathbb{N}_0$) ist induktiv wie folgt definiert:

- Alle konstanten Funktionen sind primitiv rekursiv.

$$f(n) = c \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \qquad (\text{für alle } c \in \mathbb{N}_0).$$

- Die Nachfolgerfunktion ist primitiv rekursiv: $s(n) = n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$.

- Alle Projektionen sind primitiv rekursiv.

$$f(n_1, \ldots, n_k) = n_j \quad \forall n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_0 \qquad (\text{für alle } j \in \{1, \ldots, k\}).$$

- Die Komposition von primitiv rekursiven Funktion ist primitiv rekursiv.

$$f, g \text{ primitiv rekursiv} \quad \Longrightarrow \quad h(n) = f(g(n)) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{primitiv rekursiv.}$$

- Jede Funktion, die durch *primitive Rekursion* aus primitiv rekursiven Funktionen entsteht, ist primitiv rekursiv.

$$f, g \text{ primitiv rekursiv} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} h(0, \ldots) & = & f(\ldots) \\ h(n+1, \ldots) & = & g(h(n, \ldots), \ldots) \end{array} \quad \text{primitiv rekursiv}$$

# Weitere Beispiele

- (modifizierte) Vorgängerfunktion: $$\begin{aligned} \bar{s} : \mathbb{N}_0 &\to \mathbb{N}_0 \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x - 1 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

  primitiv berechenbar, denn $$\begin{aligned} \bar{s}(0) &= 0 \\ \bar{s}(n+1) &= n \end{aligned}$$

- (modifizierte) Subtraktion: $$\begin{aligned} sub : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 &\to \mathbb{N}_0 \\ (x, y) &\mapsto \begin{cases} 0 & y \geq x \\ x - y & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

  primitiv berechenbar, denn $$\begin{aligned} sub(x, 0) &= x \\ sub(x, y+1) &= \bar{s}(sub(x, y)) \end{aligned}$$

Sei $P(x)$ ein *Prädikat*, d.h. ein logischer Ausdruck, der in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{N}$ den Wert TRUE oder FALSE liefert. Dann können wir diesem Prädikat in natürlicher Weise mit eine $0$-$1$ Funktion $\hat{P} : \mathbb{N}_0 \to \{0, 1\}$ zuordnen, indem wir setzen

$$\hat{P}(x) = 1 \qquad \Longleftrightarrow P(x)$$

Wir nennen $P(x)$ primitiv rekursiv gdw. $\hat{P}(x)$ primitiv rekursiv ist.

*Beschränkter max-Operator*: Zu einem Prädikat $P(x)$ definieren wir

$$\begin{aligned} q : \mathbb{N}_0 &\to \mathbb{N}_0 \\ n &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } \neg P(x) \text{ für alle } x \leq n \\ \max\{x \leq n \mid P(x)\} & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Dann gilt: Ist $P$ primitiv rekursiv, so auch $q$.

Denn:
$$\begin{aligned} q(0) &= 0 \\ q(n+1) &= \begin{cases} n+1 & \text{falls } P(n+1) \\ q(n) & \text{sonst} \end{cases} \\ &= q(n) + \hat{P}(n+1) * (n+1-q(n)) \end{aligned}$$

*Beschränkter Existenzquantor*: Zu einem Prädikat $P(x)$ definieren wir ein neues Prädikat $Q(x)$ durch

$$Q(n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists x \leq n \text{ mit } P(x)$$

Dann gilt: Ist $P$ primitiv rekursiv, so auch $Q$.

Denn:
$$\begin{aligned} \hat{Q}(0) &= 0 \\ \hat{Q}(n+1) &= \hat{P}(n+1) + \hat{Q}(n) - \hat{P}(n+1) * \hat{Q}(n) \end{aligned}$$

## Weitere Beispiele (2)

- Binomialkoeffizient $$\begin{array}{rcl} bin : \mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{N}_0 \\ x & \mapsto & \binom{x}{2} \end{array}$$
  primitiv berechenbar, denn $\binom{x+1}{2} = \binom{x}{2} + x$

- Es gibt eine primitiv berechenbare Funktion, die $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ *bijektiv* auf $\mathbb{N}_0$ abbildet.

  $$f(x, y) = \binom{x + y + 1}{2} + x.$$

  Analog: Es gibt eine primitiv berechenbare Funktion, die $\underbrace{\mathbb{N}_0 \times \ldots \times \mathbb{N}_0}_{k \text{ mal}}$ *bijektiv* auf $\mathbb{N}_0$ abbildet.
  Notation: Wir bezeichnen diese Funktion mit $\langle n_1 \ldots, n_k \rangle$.

- Sei $f$ wie oben. Dann sind auch die Umkehrfunktionen $g, h$ von $f$, die definiert sind durch

  $$g(f(x, y) = x, \qquad h(f(x, y)) = y, \qquad f(g(n), h(n)) = n,$$

  primitiv rekursiv. Denn:

  $$\begin{array}{rcl} g(n) & = & \max\{x \leq n \mid \exists y \leq n : f(x, y) = n\} \\ h(n) & = & \max\{y \leq n \mid \exists x \leq n : f(x, y) = n\} \end{array}$$

  Analog: Umkehrfunktionen von $\langle n_1 \ldots, n_k \rangle$.