μ-Operator

Idee: Sei $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine Funktion. Dann liefert der sogenannte μ-Operator die kleinste natürliche Zahl für die f den Wert Null annimmt.

Motivation: Der μ-Operator wird uns erlauben, “vorab” die notwendige Anzahl Durchläufe einer while-Schleife zu bestimmen, bis die Laufvariable Null wird.

Allgemein: Sei eine (nicht notwendigerweise totale) $k+1$-stellige Funktion. Die durch Anwendung des μ-Operators entstehende Funktion f_μ ist definiert durch

$$
\begin{aligned}
f_\mu : \mathbb{N}_0^k &\to \mathbb{N}_0 \\
(x_1, \ldots, x_k) &\mapsto \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N} \mid f(n, x_1, \ldots, x_k) = 0\}, & f(m, x_1, \ldots, x_k) \text{ definiert } \forall m \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

μ-rekursive Funktionen

Definition: Die Klasse der μ-rekursiven Funktionen ist die kleinste Klasse von (nicht notwendigerweise totalen) Funktionen, die die Basisfunktionen (konstante Funktionen, Nachfolgerfunktion, Projektionen) enthält und alle Funktionen, die man hieraus durch (evtl. wiederholte) Anwendung von Komposition, primitiver Rekursion und/oder des μ-Operators.

Satz: f μ-rekursiv $\iff$ f WHILE-berechenbar.

Charakteristische Funktion

Sei $A \subseteq \Sigma^*$. Die *charakteristische Funktion* von A ist definiert als

$$\begin{aligned} \chi_A : \quad \Sigma^* &\rightarrow \{0,1\} \\ w &\mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } w \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Sei $A \subseteq \Sigma^*$. Die *semi-charakteristische Funktion* von A ist definiert als

$$\begin{aligned} \chi'_A : \quad \Sigma^* &\rightarrow \{0,1\} \\ w &\mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } w \in A \\ \text{undefiniert}, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Entscheidbar und semi-entscheidbar

Definition: Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt *entscheidbar*, falls die charakteristische Funktion χ_A berechenbar ist.

Zur Erinnerung: "berechenbar" heißt Turing-berechenbar (WHILE-berechenbar, μ-rekursiv, ...)

Definition: Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt *semi-entscheidbar*, falls die semi-charakteristische Funktion χ'_A berechenbar ist.

Satz: Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann entscheidbar, wenn sowohl A als auch $\overline{A} := \Sigma^* \setminus A$ semi-entscheidbar sind.

BEWEIS: "$\Longrightarrow$" Klar.
"$\Longleftarrow$" Wenn A und $\overline{A}$ beide semi-entscheidbar sind, dann gibt es WHILE-Programme, die für ein Wort w genau dann stoppen, wenn $w \in A$ bzw. wenn $w \notin A$. Führt man daher diese beiden Programme "parallel" aus (genauer: jeweils abwechselnd einen Schritt des einen Programms und dann einen Schritt des anderen Programms) erhält man ein Programm, das A *entscheidet*.

Rekursiv aufzählbar

Definition: Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt *rekursiv aufzählbar*, falls es eine berechenbare Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \Sigma^*$ gibt, so daß

$$A = \{f(0), f(1), f(2), \ldots, \}.$$

MIT ANDEREN WORTEN: ... falls es eine berechenbare Funktion f / einen Algorithmus gibt, die/der die Worte der Sprache A “aufzählt”.

Satz: Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann semi-entscheidbar, wenn sie rekursiv aufzählbar ist.

BEWEIS:

“$\Longleftarrow$” Betrachte den folgenden Algorithmus, der eine berechenbare Funktion f verwendet, die A aufzählt:

> Lese die Eingabe $w \in \Sigma^*$; x :=0;
> **do forever**
>   **if** $f(x) = w$ then $\{$ **return**(“Ja”); **halt** $\}$
> $x := x + 1$

“$\Longrightarrow$” Betrachte den folgenden Algorithmus, der ein WHILE-Programm P simuliert, das die semi-charakteristische Funktion χ'_A berechnet:

Lese die Eingabe $n \in \mathbb{N}$.

$count := 0; k := 0$

repeat

$k := k + 1;$

if P stoppt bei Eingabe $f(word(x(k)))$ in genau $y(k)$ Schritten **then**

$count := count + 1;$

until $count = n$

return$(word(x(k)))$

Hierbei sind $x(k)$ und $y(k)$ die Umkehrfunktionen der Funktion

$$f(x, y) := \binom{x + y + 1}{2} + x$$

und $word(n)$ eine Funktion, die einer natürlichen Zahl n das n-te Wort von Σ^* zuordnet.

Das Halteproblem

Definition: Unter dem *speziellen Halteproblem* versteht man die Sprache

$$K = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ angesetzt auf } w \text{ hält}\}$$

Satz: Das spezielle Halteproblem ist nicht entscheidbar.

Definition: Unter dem *(allgemeinen) Halteproblem* versteht man die Sprache

$$K = \{w\#x \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ angesetzt auf } x \text{ hält}\}$$

Satz: Das allgemeine Halteproblem ist nicht entscheidbar.

MIT ANDEREN WORTEN: Es kann keinen Algorithmus geben, der als Eingabe ein Programm P und Daten x erhält und (für jedes solche Paar (P, x)!) entscheidet, ob P hält, wenn es mit Eingabe x gestartet wird.