Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Angelika Steger

SS 2000
Semestralklausur
29. Juli 2000

Einführung in die Informatik IV

Aufgabe 1 (5 Punkte)

L sei die durch die reguläre Grammatik $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, \mathcal{P}, S)$, mit Produktionen $\mathcal{P}$

$$\begin{aligned} S &\to aA|aB \\ A &\to b|bA|bS \\ B &\to a|aA \end{aligned}$$

gegebene Sprache.

a) Geben Sie einen nichtdeterministischen, endlichen Automaten an, der die Sprache L erkennt.

b) Leiten Sie aus dem Automaten in Teilaufgabe a) einen deterministischen Automaten ab.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

L sei die durch die Grammatik $G = (\{S, B, R\}, \{b, s\}, \mathcal{P}, S)$ mit den Produktionen $\mathcal{P}$

$$\begin{aligned} S &\to s|BS|BR \\ B &\to b \\ R &\to SS \end{aligned}$$

gegebene Sprache.

a) Gliedern Sie diese Grammatik in die Chomsky-Hierarchie ein.

b) Führen Sie für das Wort *bsbbss* den CYK-Algorithmus durch, indem Sie die erzeugte Tabelle angeben.

c) Geben Sie für das Wort *bsbbss* zwei verschiedene Ableitungsbäume an.
Hinweis: Diese können Sie z.B. aus der Tabelle des CYK-Algorithmus entnehmen.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

a) Beweisen Sie, dass die Sprache

$$L_1 := \{a^{n^2} b^n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$$

nicht regulär ist.

b) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine beliebige Funktion. Beweisen Sie: Wenn die Sprache

$$L_2 := \{a^{f(n)} b^n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$$

regulär ist, dann muss f beschränkt sein, d.h.

$$\exists c \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) \leq c.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Beweisen Sie, dass folgende Funktionen primitiv rekursiv sind, indem Sie sie mittels Komposition und primitiver Rekursion aus den Grundfunktionen (konst. Funktion , Projektion und Nachfolgerfunktion $s(n)$) erzeugen. Ferner können Sie davon ausgehen, dass folgende Funktionen primitiv rekursiv sind (wie in der Vorlesung gezeigt): Addition, Multiplikation.

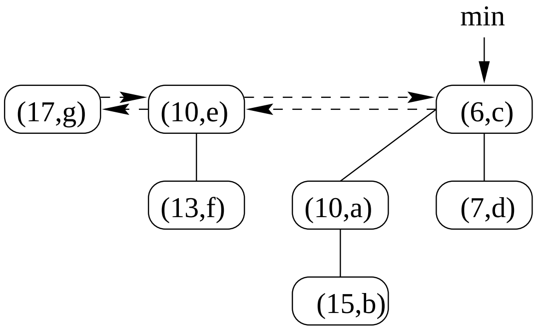
a) $\exp : (x, y) \mapsto x^y$

b) $\mathrm{div2} : x \mapsto \lfloor x/2 \rfloor$
Hinweis: Es kann hilfreich sein, zunächst eine Funktion zu definieren, die gerade und ungerade Zahlen erkennt.

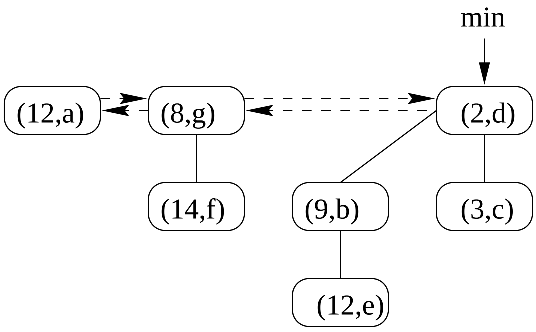
Aufgabe 5 (6 Punkte)

Ein Eintrag in einem Binomial Heap ist ein Paar `(key, element)`, wobei die erste Komponente den zum Element gehörenden Wert enthält, nach dem der Heap sortiert ist.
Wenden Sie auf die jeweils angegebenen Binomial Heaps die nachfolgenden Operationen an und zeichnen Sie die daraus entstehenden Heaps (inklusive Zwischenschritte).

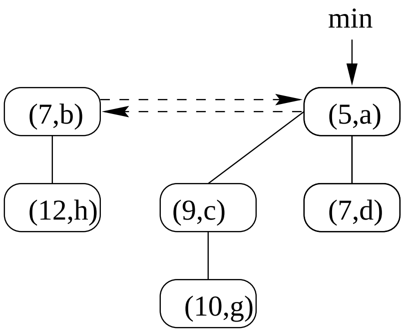
a) Führen Sie die Operation `insert (12, h)` in dem folgenden Binomial Heap durch.



b) Führen Sie die Operation `decrease-key e 11` (der zum Element `e` gehörende Wert soll um `11` verringert werden) in dem folgenden Binomial Heap durch.



c) Führen Sie die Operation `delete-min` in dem folgenden Binomial Heap durch.



Aufgabe 6 (5 Punkte)

Gegeben sei ein Array $S[\cdot]$ von n paarweise verschiedenen natürlichen Zahlen sowie eine natürliche Zahl x.

Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $\mathcal{O}(n \log n)$ an, der entscheidet, ob es zwei Zahlen a, b in $S[\cdot]$ gibt mit $a + b = x$, und begründen Sie (in Worten) die Korrektheit und Laufzeit Ihres Algorithmus.
Hinweis: Ein möglicher Lösungsweg besteht darin, $S[\cdot]$ zunächst zu sortieren.

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Diese Aufgabe beschäftigt sich mit $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit und der Reduktion von Problemen.

a) Gegeben sei die Boolesche Klausel $x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$, Ferner seien $z_1, z_2, z_3 \in \{0, 1\}$, so dass für $i = 1, 2, 3$ gilt:

$$x_i = \text{true} \iff z_i = 1 \text{ (und entsprechend } x_i = \text{false} \iff z_i = 0).$$

Geben Sie eine lineare Ungleichung in z_1, z_2, z_3 an (also $a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 \geq b$ für geeignete Zahlen a_1, a_2, a_3, b), die genau dann erfüllt ist, wenn die Boolesche Klausel den Wert *true* hat.

b) Wir definieren das Problem Zero-One Linear Inequalities wie folgt:

> **Eingabe:** Variablen $z_1, \ldots, z_n$ sowie ein System von m linearen Ungleichungen. Die j-te Ungleichung habe die Form
>
> $$a_{j1} z_1 + \ldots + a_{jn} z_n \geq b_j,$$
>
> wobei a_{ji} und b_j ganzzahlig seien für beliebige Werte i, j.
> **Ausgabe:** Yes, wenn das Ungleichungssystem eine Lösung besitzt, so dass $z_i \in \{0, 1\}$ für $i = 1, \ldots, n$, d.h. es werden nur Lösungen zugelassen, bei denen die Variablen die Werte 0 oder 1 annehmen; No sonst.

Beweisen Sie, dass das Problem Zero-One Linear Inequalities in $\mathcal{NP}$ liegt.

c) Beweisen Sie, dass das Problem Zero-One Linear Inequalities $\mathcal{NP}$-vollständig ist.