Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Angelika Steger

SS 2000
Übungsblatt 4
26. Mai 2000

Einführung in die Informatik IV

Aufgabensteller: Klaus Holzapfel
Abgabetermin: Mittwoch, 7. Juni 2000, 9:25 Uhr

Tutoraufgabe 1

Gegeben sei die Sprache $L = \{w \in \{0,1\}^\star \mid \#_0(w) = \#_1(w)\}$, wobei $\#_0(w)$ bzw. $\#_1(w)$ für die Anzahl der 0en bzw. 1en in w steht. Beweisen Sie, dass L durch keine reguläre Grammatik erzeugt werden kann. Zeigen Sie ferner, dass es sich bei L um eine deterministische kontextfreie Sprache handelt, indem Sie einen deterministischen Kellerautomaten angeben, der genau L akzeptiert.

Tutoraufgabe 2

Geben Sie eine Turingmaschine an, die eine auf dem Band gegebene Strichzahl $w \in \{|\}^\star$ so in die entsprechende Dualzahl umwandelt, dass das niederwertigste Bit rechts steht. Dabei kann man davon ausgehen, dass sich der Lesekopf der Turingmaschine zu Beginn unter dem am weitesten links stehenden Strich befindet.
Schätzen Sie ab, wieviele Schritte in Abhängigkeit von der Länge der Eingabe benötigt werden, um alle Eingabezeichen zu löschen und die Ausgabe auf das Band zu schreiben. Diskutieren Sie, wie man die Turingmaschine modifizieren kann, um die Anzahl der benötigten Schritte zu verringern. Kann die Turingmaschine so modifiziert werden, dass für beliebige Strichzahlen eine lineare Laufzeit erzielt wird?

Hausaufgabe 1 (freiwillig)

Wie in Hausaufgabe 3 gezeigt wird, ist die Sprache einer kontextfreien Grammatik leer, falls sie kein Wort der Länge kleiner der Konstante aus dem Pumpinglemma enthält.
Verwenden Sie diese Aussage, um einen effizienten Algorithmus (d.h. nicht durch Aufzählen aller Produktionen) zu erarbeiten, der für eine gegebene kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ überprüft, ob die durch sie erzeugte Sprache leer ist. Geben Sie den Algorithmus in einer Pseudo-Programmiersprache an.

Hausaufgabe 2 (freiwillig)

Zeigen Sie, dass jede kontextfreie Sprache L über einem einelementigen Alphabet Σ regulär ist. D.h.

$$|\Sigma| = 1 \;\wedge\; L \subseteq \Sigma^{\star} \;\wedge\; L \textit{ kontextfrei} \quad \Rightarrow \quad L \textit{ regulär}$$

Hausaufgabe 3 (3 + 2 = 5 Punkte)

Sei G eine kontextfreie Grammatik, $L(G)$ die durch G erzeugte Sprache und n eine zugehörige Konstante aus dem Pumpinglemma.

a) Zeigen Sie, dass $L(G)$ genau dann unendlich ist, wenn es mindestens ein Wort $z \in L(G)$ mit $n \leq |z| < 2n$ gibt.

b) Zeigen Sie weiter, dass L(G) genau dann leer ist, wenn es kein Wort $z \in L(G)$ gibt, mit $|z| < n$.

Hausaufgabe 4 (3 + 2 = 5 Punkte)

a) Die in Hausaufgabe 3 gegebene Bedingung für die Unendlichkeit von Sprachen, die durch kontextfreie Grammatiken erzeugt werden, hat eine scharfe obere Grenze. Beweisen Sie diese Behauptung, indem Sie für $n = 3$ einen endlichen Automaten angeben, der eine unendliche Sprache akzeptiert (mit 3 als Konstante aus dem Pumpinglemma), die keine Wörter der Länge 3 oder 4 enthält.

b) Geben Sie zu jeder natürlichen Zahl k eine kontextfreie Grammatik G an, die eine unendliche Sprache $L(G)$ erzeugt und für die k nicht als die Konstante aus dem Pumpinglemma verwendet werden kann, also mindestens ein Wort $z \in L(G)$ mit $|z| \geq k$ existiert, für das es keine Zerlegung $z = uvwxy$ gibt mit:

   (1) $|vx| \geq 1$

   (2) $|vwx| \leq k$

   (3) $\forall i \in \mathbb{N}_0 \;.\; uv^iwx^iy \in L(G)$