Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Angelika Steger

SS 2000
Übungsblatt 9
7. Juli 2000

Einführung in die Informatik IV

Aufgabensteller: Martin Raab
Abgabetermin: Mittwoch, 12. Juli 2000, 9:25

Tutoraufgabe 1

Geben Sie den AVL-Baum an, der durch Einfügen der Schlüssel

$$10, 15, 11, 4, 8, 7, 3, 2, 13$$

in den anfangs leeren Baum entsteht.

Tutoraufgabe 2

Zeigen Sie, dass beim *Hashing mit Verkettung* (engl. *chaining*) für eine erfolgreiche Suche im Erwartungswert Zeit $\Theta(1+\alpha)$ benötigt wird, wobei

a) angenommen wird, dass jeder Schlüssel mit gleicher Wahrscheinlichkeit und unabhängig von den anderen Schlüsseln in einem beliebigen der m Einträge der Hashtabelle gespeichert wird, und

b) $\alpha = n/m$ die durchschnittliche Anzahl Schlüssel sei, die in einem Eintrag der Hashtabelle gespeichert werden.

Hausaufgabe 1 (freiwillig)

Wie betrachten eine Klasse von *universellen Hashfunktionen*, die Schlüssel der Form $x = (x_0, \ldots, x_r)$ in eine Tabelle mit m Einträgen abbilden (wobei m prim sei).
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Klasse $\mathcal{H}$ von Hashfunktionen der Form

$$h_{a_0,\ldots,a_r}(x) := \sum_{i=0}^{r} a_i x_i \mod m, \tag{1}$$

mit beliebig aus der Menge $\{0, \ldots, m-1\}$ gewählten Werten a_i universell ist, d.h. für zwei feste Schlüssel $x \neq y$ ist die Wahrscheinleichkeit einer Kollision unter einer zufällig aus $\mathcal{H}$ gewählten Hashfunktion genau $1/m$.
Zeigen Sie nun, dass, wenn alle a_i ungleich 0 sein müssen, $\mathcal{H}$ nicht mehr universell ist. *(Hinweis: Betrachten Sie die beiden Schlüssel $x = 0$ und $y = 1$.)*

Hausaufgabe 2 (freiwillig)

Eine Klasse von Hashfunktionen $\mathcal{H}$ heißt echt 2-universell (engl. *strongly 2-independent*), wenn für jedes Paar von unterschiedlichen Schlüsseln x und y und eine zufällig aus $\mathcal{H}$ gewählte Hashfunktion h gilt, dass

$$\Pr\left[h(x) = h(y)\right] = 1/m^2.$$

Zeigen Sie erstens, dass die Familie $\mathcal{H}$ aus der Gleichung (1) nicht echt 2-universell ist, dass aber zweitens die durch Hinzufügen eines konstanten Terms b entstehende Familie

$$h_{a_0,\dots,a_r,b}(x) := \sum_{i=0}^{r} a_i x_i + b \mod m$$

echt 2-universell ist.

Hausaufgabe 3

Zeigen Sie, dass für die Höhe h eines (a, b)-Baumes mit n Blättern gilt

$$\lceil \log_b(n) \rceil \le h \le 1 + \lceil \log_a(n/2) \rceil.$$

Hausaufgabe 4

Implementieren Sie in Java ein *Wörterbuch*, das die Funktionen `is_member`, `insert` und `delete` unterstützt. Das Wörterbuch soll diese Funktionen effizient implementieren — es reicht also *nicht* das Wörtrebuch durch ein Feld oder eine verkettete Liste zu realisieren. Testen Sie Ihr Programm auf großen Datenmengen. Geben Sie das Programm unter dem Namen `Dictionary` an SOLEA ab.

Format der Eingabe/Ausgabe: Die Eingabe besteht aus Zeilen, die einen Befehl gefolgt von einem Leerzeichen und einer Zeichenkette (ohne Leerzeichen) enthalten. Der Befehl `i` (insert) soll die folgende Zeichenkette in das Wörterbuch einfügen, `d` (delete) soll die Zeichenkette falls vorhanden aus dem Wörterbuch löschen und `f` (find) soll die Zeichenkette in dem Wörterbuch suchen. Nur der Befehl `f` führt zu einer Ausgabe des Programms, nämlich zu `1`, wenn die entsprechende Zeichenkette im Wörterbuch enthalten ist, und `0` falls nicht.
Bei der Eingabe

```
i Hund
f Hund
f Katze
d Hund
f Hund
```

sollte das Programm zum Beispiel

```
1
0
0
```

ausgeben.