Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 2000/2001
Trainingsblatt O-Notation
7. November 2000

Diskrete Strukturen I

Alle Logarithmen auf diesem Blatt sind zur Basis 2 (wie in der Informatik üblich), außer wenn die Basis explizit angegeben ist.

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass folgende Beziehungen gelten:

1. $2^{20} \cdot n^2 = O(n^2)$.
2. $n(1 + (-1))^n) = O(n)$.
3. $\log(n) = o(n)$.
4. $n = o(n \log(n))$.
5. $n \log(n) = o(n \cdot \sqrt{n})$.
6. $n^{3/4}(\log(n))^4 = o(n)$.
7. $4^{\log_4(\log_4(n))} = \Theta(\log_2(n))$.
8. $4^{\log_2(\log_2(n))} = \Theta((\log_2(n))^2)$.
9. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = O(\log(n))$.
10. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} = O(1)$.

Aufgabe 2

Machen Sie sich mit Maple oder Gnuplot das Wachstum folgender Funktionen klar und entscheiden (und beweisen) Sie, für welche $i, j \in [1:5]$ $f_i = O(f_j)$ gilt.

$$
\begin{aligned}
f_1(n) &= 12345 \cdot n, \\
f_2(n) &= 42 \cdot n \log(n), \\
f_3(n) &= n^2, \\
f_4(n) &= n^3/666, \\
f_5(n) &= 3^n/2^{20}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

Zeigen Sie die folgenden Behauptungen:

1. $n^\ell = o(n^k)$ für $\ell < k \in \mathbb{N}$.
2. $n^k + n^\ell = \Theta(n^k)$ für $k \geq \ell \in \mathbb{N}$.
3. $n^k = o(2^n)$ für $k \in \mathbb{N}$.
4. $\log^k(n) = o(n)$ für $k \in \mathbb{N}$ ($\log^k(n)$ steht hierbei für $(\log(n))^k$).
5. $\log^k(n) = o(\sqrt{n})$ für $k \in \mathbb{N}$
6. $2^n = o(2^{2n})$.

Aufgabe 4

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

1. $f = O(g) \;\Leftrightarrow\; g = \Omega(f)$ und $f = o(g) \;\Leftrightarrow\; g = \omega(f)$.
2. $f = O(g) \wedge g = O(h) \;\Rightarrow\; f = O(h)$.
3. $f = o(g) \wedge g = o(h) \;\Rightarrow\; f = o(h)$.
4. $f = \Omega(g) \wedge g = \Omega(h) \;\Rightarrow\; f = \Omega(h)$.
5. $f + g = O(f) \Leftrightarrow g = O(f)$.
6. $f = O(2^n) \Leftrightarrow f = 2^{O(n)}$.
7. $f = 2^{\Theta(n)} \Rightarrow f = \Theta(2^n)$.

Aufgabe 5

Geben Sie zwei Funktionen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, so dass weder $f = O(g)$ noch $f = \Omega(g)$ gilt.