Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 2000/2001
Abschlussklausur
Gruppe A
13. Februar 2001

Diskrete Strukturen I

Vorname	Name	Matrikelnummer

Allgemeine Hinweise zur Abschlussklausur

- Bitte füllen Sie den Umschlagbogen mit Vornamen, Namen, Matrikelnummer, Studiengang, Hörsaal, Platz und Reihe **leserlich und mit Druckbuchstaben** aus.
- Versehen Sie bitte die Angabe sowie alle ausgeteilten Arbeitsbögen mit Vornamen, Namen und Matrikelnummer.
- Bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen amtlichen Lichtbildausweis auf die Hörsaalbank.
- Bitte schreiben Sie **nicht** in *roter* oder *grüner* Farbe bzw. mit Bleistift.

Allgemeine Hinweise zum Multiple-Choice-Teil

- Bitte benutzen Sie den rechten Rand **nicht** für Hilfsberechnungen.
- Falls Sie ein Kästchen versehentlich angekreuzt haben, so füllen Sie dieses bitte vollständig aus und malen unmittelbar rechts daneben eine neues Kästchen: ■ ☐. Es gilt dann als nicht angekreuzt.
- Falls Sie dieses Kästchen dennoch wieder ankreuzen wollen, so kreuzen Sie Ihr rechts daneben gemaltes Kästchen an: ■ ☒.
- Bei Antworten, die einen Zahlenwert verlangen, tragen Sie bitte den konkreten Zahlenwert und keine Formel ein, also z.B. 24 statt 4!.

Viel Glück und Erfolg!

Bewertung MC	Seite 2	Seite 3	$\sum$	Korrektor
Erstkorrektur				
Zweitkorrektur				

Korrekturrand

Aufgabe M1

Seien $(f_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ und $(g_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ Folgen sowie $F(z)$ bzw. $G(z)$ die zugehörigen erzeugenden Funktionen. Markieren Sie alle (allgemein) zutreffenden Aussagen:

$f_i = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow F(z) = z$ .... ☐

$g_i = \sum_{k=0}^{i} f_k^2$ für alle $i \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow G(z) = F(z)^2$ .... ☐

$F(0) = 1 \Rightarrow f_0 = 1$ .... ☐

$f_i = 2^i \cdot \binom{n}{i}$ für alle $i \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow F(z) = (1+2z)^n$ .... ☐

$\sum_{i=0}^{\infty} f_i = 0 \Rightarrow F(1) = 0$ .... ☐

Aufgabe M2

Im Folgenden sind mit $s_{n,k}$ die Stirling-Zahlen erster Art gemeint. Welche der folgenden Gleichungen sind für $n \geq 2$ richtig:

$s_{n+1,m} = s_{n,m} + n \cdot s_{n,m-1}$ .... ☐

$s_{n+1,1} = n!$ .... ☐

$s_{n+1,0} = 1$ .... ☐

$s_{n+1,n} = \binom{n+1}{2}$ .... ☐

Aufgabe M3

Betrachten Sie den Baum zu folgendem Prüfercode

$$(1, 3, 3, 1, 4)$$

und beantworten Sie die Fragen bzw. markieren Sie alle zutreffenden Aussagen:

Wie viele Knoten besitzt der gegebene Baum? ....

Welchen Grad hat der Knoten 3? ....

Der Baum besitzt 4 Knoten, die keine Blätter sind. .... ☐

Die Knoten 1 und 2 sind adjazent. .... ☐

Die Knoten 2 und 5 sind nicht adjazent. .... ☐

Der Baum besitzt genau 5 Kanten. .... ☐

1

2

Korrekturrand

Aufgabe M4

Im Folgenden werden einfache ungerichtete Graphen betrachtet. Markieren Sie alle (allgemein) zutreffenden Aussagen:

In jedem Graphen $G = (V, E)$ gilt: $|V| \leq |E|$. .... ☐

Der K_6 besitzt genau 15 Kanten. .... ☐

Der $K_{5,4}$ enthält einen Kreis der Länge 7. .... ☐

Ein einfacher Kreis der Länge $n \geq 3$ enthält genau n Brücken. .... ☐

Die Summe der Knotengrade im $K_{17,25}$ ist gerade. .... ☐

Der K_{10} enthält einen 4-regulären knoteninduzierten Teilgraphen. .... ☐

Es gibt mindestens einen 3-regulären Graph auf 5 Knoten. .... ☐

Jeder kreisfreie Graph ist bipartit. .... ☐

Aufgabe M5

Sei $G = (V, E)$ ein einfacher ungerichteter Graph und $A(G)$ seine Adjazenzmatrix sowie $I(G)$ seine Inzidenzmatrix, wobei $V = \{1, \ldots, n\}$ ist.

Markieren Sie alle (allgemein) zutreffenden Aussagen:

Der Grad des Knoten i ist genau ...

... die Summe der Einträge der i-ten Spalte von $A(G)$. .... ☐

... die Hälfte der Summe der Einträge der i-ten Zeile von $A(G)$. .... ☐

... die Summe der Einträge der i-ten Spalte von $I(G)$. .... ☐

... die Summe der Einträge der i-ten Zeile von $I(G)$. .... ☐

Hinweis: $A(G)$ bzw. $I(G)$ ist eine $|V| \times |V|$- bzw. $|V| \times |E|$-Matrix.

Aufgabe M6

Gegeben sei eine n-elementige Menge M. Wie viele Äquivalenzrelationen auf M gibt es, die genau k Äquivalenzklassen induzieren?

$\binom{n}{k}$ .... ☐

$S_{n,k}$ .... ☐

$s_{n,k}$ .... ☐

Hinweis: Mit $s_{n,k}$ bzw. $S_{n,k}$ sind die Stirling-Zahlen erster bzw. zweiter Art gemeint.

1 ☐
2 ☐

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ und $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ positive Funktionen. Beweisen Sie:

$$\mathcal{O}((f(n) + g(n))^2) = \mathcal{O}((f(n))^2) + \mathcal{O}((g(n))^2).$$

Hinweis: $(a - b)^2 \geq 0$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $(S_n, \circ)$ die symmetrische Gruppe auf $\{1, \ldots, n\}$, d.h. die Menge der Permutationen auf dieser Menge mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung $\circ$.

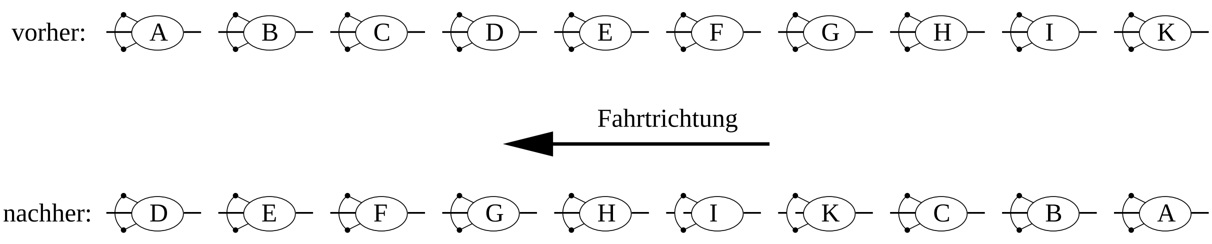
a) Geben Sie die Definition einer *geraden* Permutationen an.

b) Sei $A_n \subset S_n$ die Menge der geraden Permutation aus S_n. Beweisen Sie, dass $(A_n, \circ)$ eine Untergruppe von $(S_n, \circ)$ ist.

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Zehn befreundete Radrennfahrer nehmen an einem Radrennen der Länge 125,5 km teil und fahren immer hintereinander. Jeden Kilometer wechseln sie ihre Reihenfolge wie folgt (siehe auch die folgende Abbildung):

- Der erste Fahrer wird der letzte,
- der zweite Fahrer der vorletzte,
- der dritte Fahrer der drittletzte;
- alle anderen Fahrer wechseln um 3 Positionen nach vorne.



a) Nach wie vielen Wechseln ist zum ersten Mal wieder derselbe Fahrer wie zu Beginn des Rennens an der Spitze?

   Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Wie häufig kommt es insgesamt im Laufe des Rennens vor, dass alle zehn Radfahrer in derselbe Reihenfolge fahren, wie zu Beginn des Rennens (die Startaufstellung ist hierbei nicht mit zu zählen)?

   Begründen Sie Ihre Antwort.

c) In welcher Reihenfolge kommen die zehn Radfahrer ins Ziel?

   Geben Sie als Antwort, neben der Begründung, die Reihenfolge der Startnummern der Fahrer an, wenn zu Beginn des Rennens der Radfahrer an Position i die Startnummer i hatte.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Finden sie eine summenfreie Form für den folgenden Ausdruck:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)(i+2)}.$$

Was ergibt sich für $n \to \infty$?

Hinweis: Sie können z.B. Diskrete Stammfunktionen verwenden, wobei $\frac{1}{(i+1)(i+2)} = i^{\underline{-2}}$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Lösen Sie folgende Rekursionsgleichung, d.h. stellen Sie a_n für $n \geq 0$ als Funktion (nur) von n dar.

$$a_0 := 1, \qquad a_n := 1 + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_0 = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \quad \text{für } n \geq 1.$$

Achtung: Als Lösung ist ein Induktionsbeweis einer geratenen Lösung **nicht** zulässig, sondern nur eine vollständige Herleitung (z.B. mit erzeugenden Funktionen).

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Wir betrachten im Folgenden nur gewurzelte Bäume, deren Knoten entweder keine oder genau zwei Kinder besitzen. Ein Knoten eines Baumes heißt *höhenbalanciert*, wenn sich die Höhen der beiden an den Kindern gewurzelten Teilbäume um höchstens eins unterscheiden. Ein Baum heißt *höhenbalanciert*, wenn jeder Knoten höhenbalanciert ist.

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion über h, dass ein höhenbalancierter Baum der Höhe $h \geq 1$ mindestens φ^{h-1} Knoten besitzt, wobei $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ist.

Hinweis: Die Höhe des gewurzelten Baumes mit genau einem Knoten ist 1, der leere Baum hat Höhe 0.