Technische Universität München	WS 2000/2001
Institut für Informatik	Wiederholungsklausur
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen	Gruppe A
Prof. Dr. Ernst W. Mayr	28. April 2001

Diskrete Strukturen I

Vorname	Name	Matrikelnummer

Allgemeine Hinweise zur Wiederholungsklausur

- Bitte füllen Sie den Umschlagbogen mit Vornamen, Namen, Matrikelnummer, Studiengang, Hörsaal, Platz und Reihe **leserlich und mit Druckbuchstaben** aus.
- Versehen Sie bitte die Angabe sowie alle ausgeteilten Arbeitsbögen mit Vornamen, Namen und Matrikelnummer.
- Bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen amtlichen Lichtbildausweis auf die Hörsaalbank.
- Bitte schreiben Sie **nicht** in *roter* oder *grüner* Farbe bzw. mit Bleistift.

Allgemeine Hinweise zum Multiple-Choice-Teil

- Bitte benutzen Sie den rechten Rand **nicht** für Hilfsberechnungen.
- Falls Sie ein Kästchen versehentlich angekreuzt haben, so füllen Sie dieses bitte vollständig aus und malen unmittelbar rechts daneben eine neues Kästchen: ■ ☐. Es gilt dann als nicht angekreuzt.
- Falls Sie dieses Kästchen dennoch wieder ankreuzen wollen, so kreuzen Sie Ihr rechts daneben gemaltes Kästchen an: ■ ☒.
- Bei Antworten, die einen Zahlenwert verlangen, tragen Sie bitte den konkreten Zahlenwert und keine Formel ein, also z.B. 24 statt 4!.

Viel Glück und Erfolg!

Bewertung MC	Seite 2	Seite 3	Seite 4	$\sum$	Korrektor
Erstkorrektur					
Zweitkorrektur					

Aufgabe M1

Korrekturrand

Markieren Sie genau diejenige(n) Menge(n), die dieselbe Mächtigkeit hat (haben) wie die Menge $\mathbb{N}$ (die Menge der ganzen Zahlen größer gleich 1).

$\{1, 3, 5, \ldots\}$ .... ☐

Die Menge aller Polynome mit Koeffizienten aus $\{0, 1, 2, \ldots, 99\}$ .... ☐

$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \setminus (\mathbb{N} \cdot \pi)$ .... ☐

Die Potenzmenge der Menge aller Permutationen von $\{1, \ldots, 100\}$ .... ☐

$\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ .... ☐

Die Menge aller Polynome vom Grad genau 100 mit Koeffizienten aus der Menge $(\mathbb{Q} \cup (\mathbb{N} \cdot \pi)) \setminus \mathbb{N}$ .... ☐

Hinweis: $\mathbb{N} \cdot \pi := \{\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots\}$.

Aufgabe M2

Sei $k \in \mathbb{N}$ eine Konstante und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ eine beliebige Funktion. Markieren Sie genau die (allgemein) zutreffenden Aussagen:

$n^k = o(e^n)$ .... ☐

$n^2 + n = \omega(n^2)$ .... ☐

$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \mathcal{O}(f(n))$ .... ☐

$k \cdot f(n) = \Omega(f(n))$ .... ☐

$\ln(\ln n^n) = \Theta(\ln(n))$ .... ☐

$\mathcal{O}(f(n)) - \mathcal{O}(f(n)) = \mathcal{O}(1)$ .... ☐

Hinweis: In der letzten Aussage ist für Funktionenmengen $M, N \subseteq \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+\}$ $M - N$ definiert als $M - N = \{f - g \mid f \in M \land g \in N\}$.

Aufgabe M3

Gegeben sei die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ und die Untergruppe $(11\mathbb{Z}, +)$. Betrachten Sie die Gruppe $(\mathbb{Z}/(11\mathbb{Z}), +_{11})$, wobei $+_{11}$ die Addition modulo 11 ist. Geben Sie die Anzahl der (verschiedenen) Untergruppen dieser Gruppe an.

0 .... ☐

11 .... ☐

2 .... ☐

$\lfloor 11/2 \rfloor$ .... ☐

1 ☐

2 ☐

Aufgabe M4

Betrachten Sie die Permutation $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 & 8 & 10 & 6 & 7 & 9 \end{pmatrix}$.

Wie viele Zyklen hat π? .... [ ]

Aufgabe M5

Sei $G = (S, \circ)$ eine beliebige Gruppe mit neutralem Element 1. Markieren Sie genau die (allgemein) zutreffenden Aussagen.

Es gibt ein Element $s \in S$ mit $s \circ s = s$. .... ☐

Jedes Element ist zum neutralen Element invers. .... ☐

Für $a, b \in S$ gilt: $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$. .... ☐

Eine Gruppe heißt genau dann kommutativ, wenn gilt: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$. ... ☐

In der Gruppe G ist das neutrale Element eindeutig bestimmt. .... ☐

$a^{|S|} = 1 \Rightarrow\ a$ erzeugt G. .... ☐

Aufgabe M6

Gegeben sei eine n-elementige Knotenmenge $V = \{1, \ldots, n\}$. Wie viele verschiedene gerichtete Graphen mit Schlingen auf V gibt es, so dass jeder Graph genau k starke Zusammenhangskomponenten besitzt und jeder Knoten Eingangsgrad und Ausgangsgrad 1 hat?

$\binom{n}{k}$ .... ☐

$S_{n,k}$ .... ☐

$s_{n,k}$ .... ☐

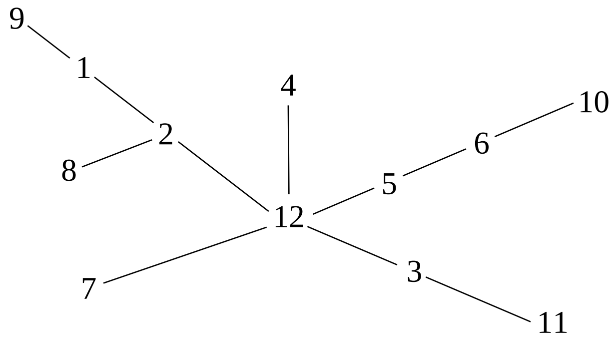
Hinweis: Mit $s_{n,k}$ bzw. $S_{n,k}$ sind die Stirling-Zahlen erster bzw. zweiter Art gemeint.

1 [ ]
2 [ ]

Aufgabe M7

Korrekturrand

Welche der angegebenen Antworten ist der Prüfercode des folgenden Baumes.



$(2, 12, 3, 12, 2, 6, 12, 5, 12, 1)$ .... ☐

$(12, 12, 2, 1, 2, 12, 6, 5, 12, 3)$ .... ☐

$(4, 7, 8, 9, 1, 2, 10, 6, 5, 11)$ .... ☐

Aufgabe M8

Im Folgenden werden einfache ungerichtete Graphen betrachtet. Markieren Sie genau die (allgemein) zutreffenden Aussagen:

Jeder bipartite Graph auf $n \in \mathbb{N}$ Knoten ist ein Teilgraph des $K_{n,n}$. .... ☐

Es existiert ein Eulerscher Graph, der eine Brücke enthält. .... ☐

Der K_8 enthält einen Kreis der Länge 4 als knoteninduzierten Teilgraphen. ...... ☐

Jeder zusammenhängende, bipartite Graph ist Hamiltonsch. .... ☐

Ein Teilgraph $G' = (V, E')$ von $G = (V, E)$ ist genau dann ein Spannbaum,
wenn $G' = (V, E')$ zusammenhängend und kreisfrei ist. .... ☐

Es gibt mindestens einen 4-regulären Graphen auf 7 Knoten. .... ☐

Die Summe der Einträge der Adjazenzmatrix ist ungerade. .... ☐

1 ☐
2 ☐

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Gibt es bei einer Party mit $n \geq 2$ Personen **immer** zwei verschiedene Personen, die dieselbe Anzahl anderer Personen kennen?

Falls ja, geben Sie einen Beweis an, falls nicht, genügt es, ein Gegenbeispiel anzugeben.

Hinweis: Wir nehmen hierbei an, dass die Relation *kennen* symmetrisch (d.h. wenn Person A Person B kennt, dann kennt Person B auch Person A) und reflexiv (jede Person kennt sich selbst) ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen zu einer Booleschen Algebra $A = \langle S, \oplus, \otimes, \sim, 0, 1\rangle$, die genau n Atome besitzt, und begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort. Dabei gelten für zwei beliebige Elemente $a, b \in S$ die folgenden Definitionen aus der Vorlesung: $a \leq b \Leftrightarrow a \otimes b = a$, sowie $a < b \Leftrightarrow a \otimes b = a \wedge a \neq b$.

a) Geben Sie die Kardinalität von S in Abhängigkeit von n an.

b) Wie viele Elemente aus S gibt es, die kleiner (d.h. $<$) als jedes Atom von A sind.

Seien X und Y zwei Mengen von Atomen aus A, und seien x und y zwei Elemente aus S mit $x = \bigoplus_{x_i \in X} x_i$ und $y = \bigoplus_{y_i \in Y} y_i$. Was muss jeweils für die Mengen X und Y gelten, so dass folgende Aussagen erfüllt sind?

c) $x \oplus y = 1$,

d) $x \leq y$.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Gleichung $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$ oder die Vandermondesche Identität.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Berechnen Sie $\Delta x^{\overline{m}}$.

Hinweis: Der Δ-Operator bezieht sich dabei auf x.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Die Reihe $(g_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ besitze die erzeugende Funktion $G(z)$. Berechnen Sie die erzeugende Funktion $F(z)$ der Reihe $(f_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ mit $f_i := \sum_{k=0}^{i} k \cdot g_k$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Das Ergebnis ist in Abhängigkeit von $G(z)$ anzugeben.

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Lösen Sie folgende Rekursionsgleichung, d.h. stellen Sie a_n für $n \geq 0$ als Funktion (nur) von n dar.

$$a_0 := 0, \qquad a_n := \frac{a_{n-1}}{2} + (n+1) \quad \text{für } n \geq 1.$$

Achtung: Als Lösung ist ein Induktionsbeweis einer geratenen Lösung **nicht** zulässig, sondern nur eine vollständige Herleitung (z.B. mit erzeugenden Funktionen).

Aufgabe 7 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass jeder Baum $T = (V, E)$ mit $\deg(v) \neq 2$ für alle $v \in V$ und $|V| \geq 3$ einen Knoten $v_0 \in V$ enthält, der zu mindestens zwei Blättern benachbart ist.