Technische Universität München	WS 2000/2001
Institut für Informatik	Mittelklausur
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen	Gruppe B
Prof. Dr. Ernst W. Mayr	9. Dezember 2000

Diskrete Strukturen I

Vorname	Name	Matrikel-Nummer

Hörsaal	Reihe	Sitzplatz

(Unterschrift)

Allgemeine Hinweise

- Bitte füllen Sie oben die Felder mit Vornamen, Namen, Matrikel-Nummer, Hörsaal, Reihe und Sitzplatz **leserlich** aus und unterschreiben Sie an der vorgesehenen Stelle.
- Bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen amtlichen Lichtbildausweis bereit.
- Bitte schreiben Sie **nicht** in *roter* oder *grüner* Farbe.
- Bitte benutzen Sie den rechten Rand **nicht** für Hilfsberechnungen.
- Die reine Arbeitszeit beträgt **90 Minuten**.
- Falls Sie ein Kästchen versehentlich angekreuzt haben, so füllen Sie dieses bitte vollständig aus und malen unmittelbar rechts daneben eine neues Kästchen: ■ ☐. Es gilt dann als nicht angekreuzt.
- Falls Sie dieses Kästchen dennoch wieder ankreuzen wollen, so kreuzen Sie Ihr rechts daneben gemaltes Kästchen an: ■ ☒.
- Bei Antworten, die einen Zahlenwert verlangen, tragen Sie bitte den konkreten Zahlenwert und keine Formel ein, also z.B. 24 statt 4!.

Viel Glück und Erfolg!

Hörsaal verlassen	von	....	bis	....
Hörsaal verlassen	von	....	bis	....
Vorzeitig abgegeben	um	....		

	Seite 2	Seite 3	Seite 4	Seite 5	Seite 6	$\sum$	Korrektor
Erstkorrektur							
Zweitkorrektur							

Korrekturrand

Aufgabe 1

Markieren Sie genau diejenige(n) Menge(n), die dieselbe Mächtigkeit hat (haben) wie die Menge $\mathbb{N}$ (der Menge der ganzen Zahlen größer gleich 1).

Die Menge $2\mathbb{Z}$ aller geraden ganzen Zahlen .... ☐

Die Menge $\mathbb{Z}/(5\mathbb{Z})$ .... ☐

Die Menge $\mathbb{Q}^+$ aller positiven rationalen Zahlen .... ☐

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen .... ☐

Die Menge $\mathbb{R}^+$ der positiven reellen Zahlen .... ☐

Die Menge aller Polynome in x mit ganzzahligen Koeffizienten .... ☐

Aufgabe 2

Markieren Sie genau die in voller Allgemeinheit korrekte(n) Aussage(n).

Für jede endliche Menge M ist eine Bijektion $f : M \to M$ stets eine Injektion. .. ☐

Für jede endliche Menge M ist eine Injektion $f : M \to M$ stets eine Bijektion. .. ☐

Für jede unendliche Menge M ist eine Bijektion $f : M \to M$ stets eine Surjektion. ☐

Für jede unendliche Menge M ist eine Surjektion $f : M \to M$ stets eine Bijektion. ☐

Für jede Menge M ist eine Bijektion $f : M \to M$ stets eine Injektion. .... ☐

Für jede Menge M ist eine Injektion $f : M \to M$ stets eine Bijektion. .... ☐

Aufgabe 3

Welche der folgenden Aussagen ist/sind richtig, wobei gegebenenfalls $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ und $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ beliebige Funktionen sind?

$2n^2 + \ln n = \mathcal{O}(n^2 \ln\ln n)$ .... ☐

$\ln\ln(n + 10) = \Omega(\ln n)$ .... ☐

$e^{n^2+n} = \mathcal{O}(e^{n^2})$ .... ☐

$1 + \sin n = \mathcal{O}(1)$ .... ☐

$f(n) = \omega(g(n)) \;\Leftrightarrow\; g(n) = o(f(n))$ .... ☐

$f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \;\Rightarrow\; f(n) = o(g(n))$ .... ☐

$f(n) + g(n) = \mathcal{O}(f(n)g(n))$ .... ☐

$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1 \;\Rightarrow\; f(n) = \Theta(g(n))$ .... ☐

1 ☐

2 ☐

Korrekturrand

Aufgabe 4

Sei Σ ein endliches Alphabet. Wir definieren die Relation $\mathcal{R} \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ durch

$$\mathcal{R} := \{(x, y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* \mid |x| \leq |y|\}.$$

Hierbei bezeichnet $|x|$ die Länge der Zeichenkette $x \in \Sigma^*$, also z. B. $|ababd| = 5$. Welche der folgenden Aussagen ist/sind richtig?

$\mathcal{R}$ ist reflexiv. .... ☐

$\mathcal{R}$ ist symmetrisch. .... ☐

$\mathcal{R}$ ist transitiv. .... ☐

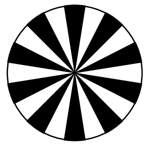
$\mathcal{R}$ ist eine lineare Ordnung. .... ☐

Aufgabe 5

Eine Basketballmannschaft, bestehend aus 5 Spielerinnen, wählt zu Beginn eines jeden Spiels zufällig die Verteilung der Rückennummern aus $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ aus. Wir nehmen im Folgenden an, dass an jedem Spiel dieselben fünf Spielerinnen teilnehmen.

Wie viele Spiele sind dabei im ungünstigsten Falle nötig, bis eine Zuordnung von Rückennummern zu Spielerinnen ein zweites Mal vorkommt? .... ☐

Aufgabe 6



Eine Dart-Scheibe ist in 20 Sektoren aufgeteilt. Ein Dart-Spieler wirft mit seinen Darts (Pfeilen), wobei er mit jedem Wurf die Dart-Scheibe trifft.

Wie oft wird der am häufigsten getroffene Sektor dabei in jedem Fall mindestens getroffen, wenn 261-mal geworfen wurde. .... ☐

Angenommen, es wird 69-mal auf die Dartscheibe geworfen, wobei jeder Sektor nur maximal 5-mal getroffen wird. Geben Sie die größtmögliche Anzahl von Sektoren an, die **in jedem Fall** mindestens 3-mal getroffen wird. .... ☐

Aufgabe 7

Betrachten Sie in der Gruppe $(\mathbb{Z}/(5\mathbb{Z}), +)$ die Gleichung $[-20] + x = [6]$. Markieren Sie alle richtigen Lösungen dieser Gleichung.

$x = 26$ .... ☐

$x = [1]$ .... ☐

$x = [14]$ .... ☐

$x = [-4]$ .... ☐

Hinweis: Hier bezeichnet $[a]$ die Äquivalenzklasse, in der a liegt.

1

2

Aufgabe 8

Gegeben seien

$$\pi := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Wie allgemein üblich, soll die Verkettung von Permutationen von rechts nach links gelesen werden, also $(\pi \circ \sigma)(i) := \pi(\sigma(i))$. *Wenn Sie eine Permutation in Wertetabellendarstellung aufschreiben sollen, so genügt es, die untere Zeile anzugeben, wobei die Einträge durch Kommata getrennt werden sollen.*

Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \leftrightsquigarrow (2, 1, 3)$

Geben Sie die gesuchte Lösung an bzw. kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an.

Geben Sie π^{-1} in Wertetabellendarstellung an. .... ☐

Geben Sie σ^{-1} in Wertetabellendarstellung an. .... ☐

Geben Sie $(\pi \circ \sigma)^{-1}$ in Wertetabellendarstellung an. .... ☐

Geben Sie das kleinste $k \in \mathbb{N}$ an, so dass $\sigma^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. ...... ☐

Die Permutation σ ist gerade. .... ☐

Die Permutation π^{-1} ist gerade. .... ☐

Aufgabe 9

Betrachten Sie die Abbildung $\nu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x - y$. Dies ist ein Homomorphismus von der Gruppe $(\mathbb{R}^2, +_{\mathbb{R}^2})$ in die Gruppe $(\mathbb{R}, +)$, wobei $+_{\mathbb{R}^2}$ die gewöhnliche Vektorraumaddition im $\mathbb{R}^2$ ist. Sei $K := \nu^{-1}(0)$ das Urbild der Null unter ν.

Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an:

$K = \{(0, 0)\}$ .... ☐

$K = \{(c, c) \mid c \in \mathbb{R}\}$ .... ☐

$K = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$ .... ☐

$K = \{(x, y) \mid x + y \in \mathbb{Z}\}$ .... ☐

1 ☐

2 ☐

Aufgabe 10

Welche der folgenden Aussagen ist/sind richtig? Hierbei ist $\mathbb{Z}_n := \{0, \ldots, n-1\} \subset \mathbb{Z}$ und $a +_n b := (a+b) \bmod n$ für $a, b \in \mathbb{Z}_n$.

Es gibt einen Isomorphismus zwischen den Gruppen $(\mathbb{Z}_5, +_5)$ und $(\mathbb{Z}_{25}, +_{25})$. .... ☐

Es gibt einen Isomorphismus zwischen den Gruppen $(\mathbb{Z}, +)$ und $(5\mathbb{Z}, +)$. .... ☐

Aufgabe 11

Welche der folgenden Aussagen ist/sind richtig? Es gibt eine Boolesche Algebra mit genau i Elementen für

alle $i \in \{8^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. .... ☐

alle $i \in \{2 \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\}$, ... ☐

Aufgabe 12

Welche der folgenden Beziehungen sind in einer Booleschen Algebra $A := \langle S, \oplus, \otimes, \sim, 0, 1\rangle$ in voller Allgemeinheit richtig? Dabei gelte $a, b, c \in S$ und $\leq$ ist wie in der Vorlesung als $a \leq b :\Leftrightarrow a \otimes b = a$ definiert.

$(a \otimes \sim a) \oplus (b \oplus \sim b) = 1$ .... ☐

$(c \otimes (\sim (a \oplus b))) \oplus (c \otimes (\sim a \otimes \sim b)) = c$ .... ☐

$(\sim a) \oplus ((a \otimes b) \otimes c) = ((c \otimes b) \oplus \sim a)$ .... ☐

$a \leq b \wedge b \leq c \quad \Rightarrow \quad a \leq (b \oplus c)$ .... ☐

$a \leq b \wedge a \leq c \quad \Rightarrow \quad b \otimes c = a$ .... ☐

Aufgabe 13

Betrachten Sie die Potenzmengenalgebra $A := \langle \mathcal{P}(S), \oplus, \otimes, \sim, 0, 1\rangle$, wobei $\mathcal{P}(S)$ für die Potenzmenge von $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ steht. (Hierbei entspricht $\oplus$ der Vereinigung, $\otimes$ dem Schnitt und $\sim$ dem Komplement, d.h. $\sim X$ bezeichnet das Komplement von X bezüglich S.) Bestimmen Sie die richtigen Aussagen bzw. berechnen Sie die angegebenen Ausdrücke (geben Sie dabei das Ergebnis immer direkt an, d.h. in Mengenschreibweise durch Aufzählen der Elemente).

$(\{a, d, e\} \otimes \{c, e, f\}) \oplus (\{a, d, e, f\} \otimes \sim \{d, f\}))$ .... ☐

$\{\}$ ist kein Atom der Algebra .... ☐

$\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ ist ein Atom der Algebra .... ☐

Wie viele verschiedene Atome besitzt die Algebra A? .... ☐

Aufgabe 14

Wie viele verschiedene Wörter der Länge 5 über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ gibt es, die gleich viele a's wie b's enthalten? .... ☐

1 ☐

2 ☐

Aufgabe 15

Korrekturrand

Wie viele natürliche Zahlen größer gleich 1 und kleiner gleich 100 sind weder von der Form x^2 noch x^3 für ein $x \in \mathbb{N}$? (Hinweis: $3^3 = 27, 4^3 = 64, 5^3 = 125$)

- 73 ☐
- 82 ☐
- 88 ☐
- 90 ☐
- 95 ☐

Aufgabe 16

Wie viele verschiedene Lösungen $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}_0^k$ hat die Gleichung

$$n = x_1 + x_2 + \cdots + x_k?$$

Achtung: Beachten Sie, dass dabei $\boldsymbol{x_i \geq 0}$ *ist.*

- $\binom{n-k}{n}$ ☐
- $\binom{n+k-1}{k-1}$ ☐
- $\binom{n-1}{k-1}$ ☐
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ ☐

1 ☐
2 ☐