Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 2000/2001
Übungsblatt 1
20. Oktober 2000

Diskrete Strukturen I

Tutoraufgaben

Aufgabe 1. Seien M, N und P drei beliebige Mengen.

a. Zeigen Sie, dass für zwei Abbildungen $f : M \to N$ und $g : N \to P$ gilt: Ist $g \circ f$ bijektiv, so ist f injektiv und g surjektiv.

b. Für welche Mengen M ist jede Injektion $M \to M$ eine Bijektion?

c. Zeigen Sie, dass für $m = |M|$ und $n = |N|$ die Anzahl aller injektiven Abbildungen von M in N gegeben ist durch

$$|\mathrm{Inj}(M,N)| = \prod_{i=1}^{m}(n-i+1).$$

Anmerkung: Für den obigen Term schreibt man auch abkürzend $n^{\underline{m}}$.

Aufgabe 2. Was ist falsch an folgendem Beweis der Behauptung

"Sind n Geraden in der Ebene je paarweise nicht-parallel, so schneiden sie sich alle in einem gemeinsamen Punkt" ?

Beweis durch Induktion. Für $n = 1$ (und auch $n = 2$) ist die Behauptung offenbar korrekt. Aus der Annahme ihrer Korrektheit für $n = k$ folgern wir die Gültigkeit für $n = k + 1$: Wir nummerieren die Geraden mit $1, 2, \ldots, k + 1$ durch. Dann folgt aus der Induktionsvoraussetzung, dass sich die Geraden $1, \ldots, k$ in einem gemeinsamen Punkt p schneiden. Ebenso gibt es einen gemeinsamen Schnittpunkt q für die Geraden $2, \ldots, k+1$. Es muss aber $p = q$ gelten, denn Geraden, die zwei verschiedene Punkte gemeinsam haben, sind gleich (also insbesondere parallel). Also schneiden sich alle $k + 1$ Geraden im selben Punkt.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{N}_0$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$2^{n-1}(a^n + b^n) \geq (a + b)^n.$$

Freiwillige Aufgaben (Zentralübung)

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass es nicht mehr rationale Zahlen gibt als natürliche Zahlen, dass also eine Injektion $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ existiert. Geben Sie eine solche Injektion explizit an.

Aufgabe 5. Zeigen Sie analog zu Aufgabe 4, dass auch die Menge aller Polynome $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ mit ganzzahligen Koeffizienten a_i und $n \in \mathbb{N}_0$ nicht mächtiger ist als die Menge der natürlichen Zahlen.

Aufgabe 6.

a. Widerlegen Sie folgende Aussage über Funktionen $f, g, r, s : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^+$: "$f = O(s) \wedge g = O(r) \Rightarrow f - g = O(s - r)$".

b. Geben Sie zwei monoton wachsende Funktionen $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ an, die erfüllen: $f \neq O(g)$ und $g \neq O(f)$.

c. Geben Sie eine Funktion f an, für die gilt: $f = o(2^n)$ und $f = \omega(p)$ für jedes Polynom $p \in \mathbb{Q}[x]$.