Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 2000/2001
Übungsblatt 10
19. Dezember 2000

Diskrete Strukturen I

Abgabetermin für die Computeraufgaben: 9. Januar 2001 (16.^{00} Uhr)
(Aufgabensteller: Volker Heun)

Tutoraufgabe 1

Seien $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ und $b = (b_0, b_1, b_2, \ldots)$ zwei unendliche Folgen reeller Zahlen. Weiter seien $A(z)$ und $B(z)$ ihre zugehörigen gewöhnlichen erzeugenden Funktionen, d.h.

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{bzw.} \qquad B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $c = (c_0, c_1, c_2, \ldots)$ jeweils die angegebene Beziehung für die gewöhnliche erzeugende Funktion $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ von c erfüllt.

(a) Mit $c_n := \alpha \cdot a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $C(z) = \alpha \cdot A(z)$.

(b) Mit $c_n := a_n + b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $C(z) = A(z) + B(z)$.

(c) Mit $c_n := a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $C(z) = \frac{1}{z}(A(z) - a_0)$.

(d) Mit $c_0 := 0$ und $c_n := a_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $C(z) = z \cdot A(z)$.

(e) Mit $c_0 := 0$ und $c_n := \frac{a_n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $C(z) = \int_0^z \frac{A(x) - a_0}{x} dx$.

(f) Mit $c_n := (n+1) \cdot a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $C(z) = \frac{d}{dz}(z \cdot A(z))$.

(g) Mit $c_n := n \cdot a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $C(z) = z \cdot \frac{d}{dz} A(z)$.

(h) Mit $c_n := \sum_{i=0}^{n} a_i$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $C(z) = \frac{A(z)}{1-z}$.

(i) Mit $c_n := \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $C(z) = A(z) \cdot B(z)$.

Tutoraufgabe 2

Bestimmen Sie mit Hilfe von gewöhnlichen erzeugenden Funktionen die Lösung der folgenden Rekursionsgleichung:

$$c_0 = 0, \qquad c_n = (n+1) + \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} c_i \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: *Die als freiwillig gekennzeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und sind für die Klausurzulassung ohne Bedeutung.*

Freiwillige Aufgabe 1

Lösen Sie die folgenden homogenen linearen Rekursionsgleichungen mit Hilfe von gewöhnlichen erzeugenden Funktionen:

(a) $a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \qquad a_n = \frac{1}{6}(a_{n-1} + a_{n-2}) \quad$ für $n \geq 2$.

(b) $b_0 = 0, \quad b_1 = 1, \qquad b_n = \frac{3}{2} b_{n-1} + b_{n-2} \quad$ für $n \geq 2$.

Freiwillige Aufgabe 2

Lösen Sie die folgenden Rekursionsgleichungen mit Hilfe von gewöhnlichen erzeugenden Funktionen:

(c) $c_0 = 0, \qquad c_n = \frac{1}{2}c_{n-1} + 3^n \quad \text{für } n \geq 1.$

(d) $d_0 = 1, \qquad d_n = \sum_{i=0}^{n-1} d_i \quad \text{für } n \geq 1.$

Für Teil (d) können die Beziehungen der Tutoraufgabe 1 hilfreich sein.

***Hinweise** zur Bearbeitung der Computeraufgaben finden Sie auf der Web-Seite zu den Übungen.*

Computeraufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $m \in \mathbb{N}$ und seien $a = (a_0, \ldots, a_m, 0, 0, \ldots)$ und $b = (b_0, \ldots, b_m, 0, 0, \ldots)$ zwei Folgen reeller Zahlen, die (ab dem $(m+1)$-ten Glied Null sind und) die folgende Beziehung erfüllen:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} \binom{m-k}{n-k} b_k.$$

Bestimmen Sie zunächst eine explizite Formel für die Folgenglieder der Folge b in Abhängigkeit von $m \in \mathbb{N}$ und der Folge a. In Snippet erhalten Sie konkrete Werte für $n \leq m \in \mathbb{N}$ und für die Folgenglieder der Folge a. Für diese konkreten Werte geben Sie dann den Wert von b_n als Lösung in Snippet ein.

Hinweis: Das Ergebnis ist ganzzahlig.

Computeraufgabe 2 (5 Punkte)

Berechnen Sie die gewöhnliche erzeugende Funktion $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für die Folge $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, die durch folgende Rekursionsgleichung gegeben ist:

$$a_n = \alpha \cdot a_{n-1} + \beta \cdot a_{n-2} + \gamma \cdot a_{n-3} \quad \text{für } n \geq 3.$$

Die konkreten Werte von a_0, a_1 und a_2 sowie von α, β und γ werden von Snippet vorgegeben. Als Lösung ist in Snippet der Wert von $1260 \cdot A(2)$ einzugeben.

Hinweis: Das Ergebnis ist ganzzahlig.

Computeraufgabe 3 (5 Punkte)

Was ist der Koeffizient von z^{2n} in der Reihenentwicklung von

$$\frac{1}{1-z^2} \cdot \ln\left(\frac{1}{1-z}\right).$$

Computeraufgabe 4 (5 Punkte)

Betrachten Sie die Gruppe $(\mathbb{Z}_n^*, *_n)$, wobei $\mathbb{Z}_n^* = \{z \in \mathbb{Z}_n = \{0, \ldots, n-1\} \mid \mathrm{ggT}(z, n) = 1\}$ und $a *_n b := (a * b) \bmod n$ für $a, b \in \mathbb{Z}_n^*$. Berechnen Sie für die von Snippet vorgegebenen Werte für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Z}_n^*$ das Inverse a^{-1} in der Gruppe $(\mathbb{Z}_n^*, *_n)$.

Hinweis: Das Stichwort *Euklidischer Algorithmus* sollte bei der Bearbeitung weiterhelfen.

Fröhliche Weihnachten
und einen guten Rutsch ins neue Jahr
