Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 2000/2001
Übungsblatt 11
9. Januar 2001

Diskrete Strukturen I

Abgabetermin für die Computeraufgaben: Dienstag, den 16. Januar 2001 (16.[00] Uhr)
(Aufgabensteller: Klaus Holzapfel)

Tutoraufgabe 1

Gegeben sei ein Graph mit folgender Inzidenzmatrix B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Zeichnen Sie den Graphen und bestimmen Sie den maximalen Knotengrad.

b) Geben Sie die Adjazenzmatrix des Graphen an.

c) Aus wie vielen Zusammenhangskomponenten besteht der Graph?

d) Enthält der Graph den $K_{2,3}$ als Teilgraph?

e) Zeichen Sie den durch die Knotenmenge $S = \{3, 5, 6, 7, 9\}$ induzierten Teilgraphen.

Tutoraufgabe 2

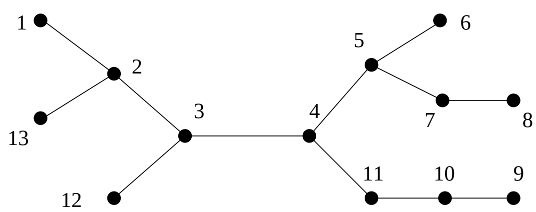
Sei B die Inzidenzmatrix eines (einfachen) Graphen G und A die zugehörige Adjazenzmatrix. Beweisen Sie den aus der Vorlesung bekannten Zusammenhang:

$$B \cdot B^T = \deg(G) + A.$$

Hierbei steht $\deg(G)$ für die Diagonalmatrix, wobei im i-ten Diagonaleintrag der Grad es entsprechenden Knoten v_i steht.

Tutoraufgabe 3

a) Geben Sie den Prüfer-Code zu folgendem Baum an.



b) Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen Spannbäume in einem vollständigen Graphen mit n Knoten.

c) Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen Spannbäume in einem vollständigen Graphen mit 10 Knoten, in denen jeder Knoten, der kein Blatt ist, einen ungeraden Grad hat.

Hinweis: *Die als freiwillig gekennzeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und sind für die Klausurzulassung ohne Bedeutung.*

Freiwillige Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass jeder Baum $T = (V, E)$ mit $\deg(v) \neq 2$ für alle $v \in V$ und $|V| \geq 3$ einen Knoten $v_0 \in V$ enthält, der zu mindestens zwei Blättern benachbart ist.

Freiwillige Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass es in *jedem* Graphen $G = (V, E)$, $|V| \geq 2$, zwei Knoten $x, y \in V$ $(x \neq y)$ gibt, mit $\deg(x) = \deg(y)$.

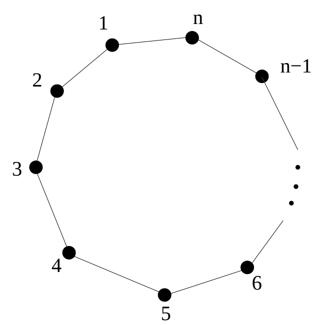
Hinweise *zur Bearbeitung der Computeraufgaben finden Sie auf der Web-Seite zu den Übungen.*

Computeraufgabe 1 (4 Punkte)

In einer Gruppe von x Personen kennt jede Person höchstens y andere. Wie viele Paare von Personen, die sich gegenseitig kennen, kann es in dieser Gruppe höchstens geben?

Computeraufgabe 2 (4 Punkte)

Wie viele verschiedene (einfache) Graphen mit Knotenmenge $\{1, \ldots, n\}$ gibt es, die den folgenden Teilgraph enthalten?



Computeraufgabe 3 (6 Punkte)

Betrachten Sie den Baum zum gegebenen Prüfer-Code und beantworten Sie folgende Fragen:

a) Wie viele Blätter besitzt der Baum?

b) Gibt es einen Knoten mit Grad x?

c) Welchen Grad besitzt der Knoten v?

Computeraufgabe 4 (6 Punkte)

Entscheiden Sie, ob es (einfache) Graphen bzw. Bäume zu vorgegebenen Gradfolgen geben kann.