Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 2000/2001
Übungsblatt 13
19. Januar 2001

Diskrete Strukturen I

Abgabetermin für die Computeraufgaben: Dienstag, den 30. Januar 2001 (16.^{00} Uhr)
(Aufgabensteller: Martin Raab)

Tutoraufgabe 1

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit n Knoten, und sei $f : V \to [n]$ eine Nummerierung der Knoten. Die *Bandbreite* b_f eines durch f nummerierten Graphen G wird folgendermaßen definiert:

$$b_f := \max_{\{u,v\} \in E} |f(u) - f(v)|.$$

Aus dieser Definition ergibt sich das *Bandbreitenproblem*:

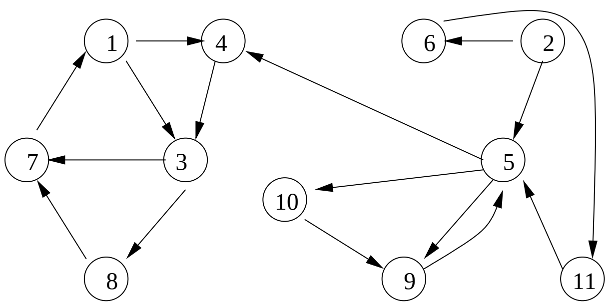
> Bestimme für einen Graphen G die Bandbreite $b(G) := \min_{f \text{ Nummerierung}} b_f$.

Im Allgemeinen ist das Bandbreitenproblem ein schwieriges Problem (es gehört zur Klasse der **NP**-schweren Probleme). Wir werden hier die Bandbreiten für einige einfache Graphen berechnen.

1. Zeigen Sie, dass für jeden Weg P_n ($n \geq 2$) die Bandbreite $b(P_n) = 1$ ist und geben Sie eine entsprechende Nummerierung an.
2. Zeigen Sie, dass für einen Kreis C_n die Bandbreite $b(C_n) = 2$ ist und geben Sie eine entsprechende Nummerierung an.
3. Es gilt $b(K_n) = n - 1$. Bestimmen Sie die Bandbreite $b(K_{n_1,n_2})$.

Tutoraufgabe 2

1. Führen Sie in dem folgenden gerichteten Graphen eine Tiefensuche beginned bei Knoten 1 durch. Die Nachbarn eines Knotens sollen dabei in der durch ihre Knotennummern gegebenen Reihenfolge besucht werden. Teilen Sie die Kanten in Baumkanten, Vorwärts- und Rückwärtskanten und Querkanten ein.



2. Bestimmen Sie die starken Zusammenhangskomponenten.

3. Innerhalb einer starken Zusammenhangskomponente wird der Knoten mit der kleinsten Präordernummer die *Wurzel* der starken Zusammenhangskomponente genannt. Zeigen Sie, dass ein Knoten r genau dann die Wurzel einer starken Zusammenhangskomponente ist,
   - wenn es keine Rückwärtskante von r oder einem Nachfahren von r zu einem echten Vorfahren von r gibt und
   - wenn es auch keine Querkante von r oder einem Nachfahren von r zu einem Knoten w gibt, so dass die Wurzel der starken Zusammenhangskomponente von w ein Vorfahre von r ist.
4. Skizzieren Sie, wie der Algorithmus zur Tiefensuche erweitert werden muss, um die starken Zusammenhangskomponenten eines Digraphen in linearer Zeit, d.h. in $O(|V| + |E|)$, zu berechnen.

Hinweis: *Die als freiwillig gekennzeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und sind für die Klausurzulassung ohne Bedeutung.*

Freiwillige Aufgabe 1

In dieser Aufgabe geht es darum einen Algorithmus zu entwickeln, der die Brücken eines Graphen findet.

1. Geben Sie einen Algorithmus an, der festellt, ob eine gegebene Kante eine Brücke ist.
2. Geben Sie einen Algorithmus an, der alle Brücken eines Graphen berechnet. Hat Ihr Algorithmus lineare Laufzeit, d.h. Laufzeit $O(|V| + |E|)$? Wenn nein, überlegen Sie sich, wie die Tiefensuche erweitert werden kann, um dieses Problem zu lösen.

Freiwillige Aufgabe 2

Zeigen sie, dass ein dreiecksfreier Graph $G = (V, E)$ mit n Knoten höchstens $\frac{n^2}{4}$ Kanten hat. Zeigen Sie außerdem, dass der $K_{n/2,n/2}$ der einzige dreiecksfreie Graph mit n Knoten und $\frac{n^2}{4}$ Kanten ist.

***Hinweise** zur Bearbeitung der Computeraufgaben finden Sie auf der Web-Seite zu den Übungen.*

Computeraufgabe 1

Snippet wählt für Sie einen Graphen aus, auf dem Sie eine Tiefensuche beginnend bei Knoten v_i durchführen sollen. Die Nachbarn eines Knotens sollen dabei in der durch ihre Knotennummern gegebenen Reihenfolge besucht werden.

1. Geben Sie die Präordernummern der angegebenen Knoten an.
2. Geben Sie die Postordernummern der angegebenen Knoten an.

Damit Snippet die Eingabe richtig korrigieren kann, *müssen* die Prä- und Postordernummern ohne Leerzeichen und nur durch Kommata getrennt eingegeben werden.

Computeraufgabe 2

Sei $G = (V, E)$ ein Graph auf dem eine Tiefensuche durchgeführt wurde. Snippet gibt Ihnen für jeden der Knoten $v_1, \ldots, v_n$ die Prä- und Postordernummer an. Rekonstruieren Sie daraus den durch die Tiefensuche berechneten Spannbaum und beantworten Sie die Fragen der folgenden Form:

- Ist die Kante $\{v_i, v_j\}$ im durch die Tiefensuche berechneten Spannbaum enthalten?

Computeraufgabe 3

1. Snippet gibt Ihnen einen gewichteten Graphen und eine Liste von Kanten an. Entscheiden Sie für jede der Kanten, ob sie im minimalen Spannbaum enthalten ist oder nicht.
2. Geben Sie das Gewicht des minimalen Spannbaums ein.