Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 2000/2001
Übungsblatt 2
24. Oktober 2000

Diskrete Strukturen I

(Aufgabensteller: Thomas Schickinger)

Abgabetermin für die Computeraufgaben: Dienstag, 31. Oktober 2000 (12.⁰⁰ Uhr)

Tutoraufgabe 1

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen zu den Landauschen Symbolen:
Für beliebige Funktionen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ und $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ gilt

a) $f(n) = \mathcal{O}(f(n))$,

b) $\mathcal{O}(f(n)g(n)) = f(n)\mathcal{O}(g(n))$,

c) $\mathcal{O}(f(n) + g(n)) = f(n) + \mathcal{O}(g(n))$,

d) $\ln(1 + \mathcal{O}(f(n))) = \mathcal{O}(f(n))$ für $f(n) = o(1)$.

Tutoraufgabe 2

Was ist falsch an folgender Argumentation?
Wir zeigen $f(n) := \sum_{i=1}^{n} i = \mathcal{O}(n)$. Beweis durch Induktion über n.
Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt offensichtlich $f(1) = 1 = \mathcal{O}(1)$.
Induktionsschritt:

$$f(n+1) = \sum_{i=1}^{n+1} i = n + 1 + \sum_{i=1}^{n} i = n + 1 + \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n).$$

Hinweis: *Die als freiwillig gekennzeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und sind für die Klausurzulassung ohne Bedeutung.*

Freiwillige Aufgabe 1

Sei das Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ gegeben. Untersuchen Sie die Teilstringrelation $\sqsubseteq\ \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$, die definiert ist durch

$$\sqsubseteq \quad := \quad \{(x, y) \mid \exists y_1, y_2 \in \Sigma^* \ : \ y = y_1 x y_2\}.$$

Beispielsweise gilt also $ba \sqsubseteq ccabab$, aber $cb \not\sqsubseteq ccabab$.
Welche der folgenden Eigenschaften treffen auf $\sqsubseteq$ zu: reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv?
Sei $H := \{x \in \Sigma^* \mid x \sqsubseteq abac\}$. Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm von $\sqsubseteq\ \cap (H \times H)$.

Freiwillige Aufgabe 2

Gegeben sei die rekursiv definierte Funktion $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$T(n) = 2T(\lfloor\sqrt{n}\rfloor) + \ln n \quad \text{und} \quad T(1) = 0.$$

Zeigen Sie, daß $T(n) = \mathcal{O}(\ln n \cdot \ln\ln n)$.

***Hinweise** zur Bearbeitung der Computeraufgaben finden Sie auf der Web-Seite zu den Übungen.*

Computeraufgabe 1 (8 Punkte)

Sei $X := \{1, \ldots, n\}$.

a) Wieviele verschiedene Relationen $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ gibt es?

b) Wieviele davon sind Funktionen[1]?

c) Wieviele davon sind surjektive Funktionen?

d) Wieviele davon sind bijektive Funktionen?

Computeraufgabe 2 (12 Punkte)

Gilt für die folgenden Funktionen $f(n)$ und $g(n)$, daß $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, $f(n) = \Omega(g(n))$ oder $f(n) = \Theta(g(n))$?

Hinweis: Aus $f(n) = \Theta(g(n))$ folgt selbstverständlich $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ und $f(n) = \Omega(g(n))$. In diesem Fall soll aber die stärkste Aussage, also $f(n) = \Theta(g(n))$ als Lösung angegeben werden.

$$\begin{array}{ll}
f(n) = (\ln n)^{\ln n} & g(n) = n^{\ln\ln n} \\
f(n) = \ln\ln n & g(n) = \sqrt{\ln n} \\
f(n) = 2^{\sqrt{2\ln n}} & g(n) = n \\
f(n) = e^n & g(n) = 2^n \\
f(n) = \ln(n!) & g(n) = n\ln n \\
f(n) = (\lceil\ln n\rceil)! & g(n) = n^{\ln\ln\ln n}
\end{array}$$

[1] Hierunter verstehen wir im Folgenden totale Funktionen, also jedem $x \in X$ wird ein Bild $f(x)$ zugeordnet