Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 2000/2001
Übungsblatt 3
31. Oktober 2000

Diskrete Strukturen I

Abgabetermin für die Computeraufgaben: Dienstag, den 7. November 2000 (12.^{00} Uhr)
(Aufgabensteller: Volker Heun)

Tutoraufgabe 1

Sei M eine endliche Menge und $f : M \to M$ eine Bijektion. Eine nichtleere Teilmenge $S \subseteq M$ nennen wir *stabil (unter f)*, wenn f eingeschränkt auf S ebenfalls eine Selbstabbildung ist, d.h. wenn $f(S) \subseteq S$ gilt. Eine stabile Menge S nennen wir einen *Zyklus*, wenn sie keine stabile Menge als echte Teilmenge enthält, d.h. wenn jede echte Teilmenge $S' \subsetneq S$ nicht stabil ist.

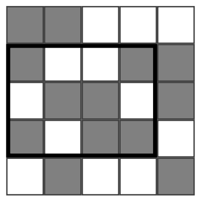
Zeigen Sie, dass eine Bijektion $f : M \to M$ die Menge M in Zyklen partitioniert, sofern M endlich und nichtleer ist.

Tutoraufgabe 2

Sei $A \subseteq \{1, \ldots, 2n\} \subset \mathbb{N}$ mit $|A| = n + 1$.

1. Zeigen Sie, dass es zwei Zahlen in A gibt, deren Summe $2n + 1$ ist.
2. Zeigen Sie, dass es zwei Zahlen in A gibt, so dass die eine die andere teilt.

Tutoraufgabe 3



Gegeben sei ein 5×5-Feld aus kleinen Quadraten. Jedes der kleinen Quadrate ist dabei entweder schwarz oder weiß gefärbt. Zeigen Sie, dass es für jede Färbung des 5×5-Feldes mindestens ein $n \times m$-Teil*rechteck* mit $n, m \geq 2$ gibt, so dass die vier kleinen Quadrate in den Eckpunkten gleich gefärbt sind.

Hinweis: *Die als freiwillig gekennzeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und sind für die Klausurzulassung ohne Bedeutung.*

Freiwillige Aufgabe 1

Betrachten Sie die folgende Aussage $A(n)$ für positive reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$:

$$A(n) \ : \ \prod_{i=1}^{n} x_i \ \leq \ \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right)^n .$$

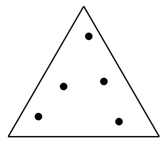
Die Gültigkeit dieser Aussage lässt sich wie folgt beweisen:

1. Zeigen Sie, dass $A(1)$ und $A(2)$ gilt.
2. Zeigen Sie, dass aus der Gültigkeit von $A(2)$ und $A(n)$ die Gültigkeit von $A(2n)$ folgt.

3. Zeigen Sie, dass aus der Gültigkeit von $A(n)$ die Gültigkeit von $A(n-1)$ folgt.
   Hinweis: Setzen Sie hierzu $x_n := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} x_i$.
4. Argumentieren Sie, dass aus 1–3 die Gültigkeit von $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt.

Freiwillige Aufgabe 2

In einem gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge 1 befinden sich fünf Punkte. Zeigen Sie, dass es mindestens ein Paar von Punkten gibt, deren Abstand höchstens $1/2$ ist.



***Hinweise** zur Bearbeitung der Computeraufgaben finden Sie auf der Web-Seite zu den Übungen.*

Computeraufgabe 1 (8 Punkte)

Berechnen Sie für ein vorgegebenes $n \in \mathbb{N}$ die Summe aller Primzahlen kleiner gleich n (z.B. mit Maple).

Computeraufgabe 2 (6 Punkte)

Welche der folgenden Beziehungen sind richtig, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ sind und $b > 1$ ist:

1. $\log_b(c + d) = \log_b(c) + \log_b(d)$,
2. $\log_b(c) \cdot \log_c(b) = 1$ für $c > 1$,
3. $\log_b(a) = \dfrac{\log_c(a)}{\log_b(c)}$ für $c > 1$,
4. $a^{\log_b(c)} = c^{\log_b(a)}$,
5. $\log_b(a^c) = \dfrac{c}{\log_a(b)}$ für $a > 1$.
6. $\log_b(c \cdot d) \leq 2 \log_b(c + d)$.

Computeraufgabe 3 (6 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ vorgegeben und sei $M = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x + y \geq n\}$. Wir definieren eine binäre Relation $\sim$ auf $M \times M$, wie folgt:

$$(x, y) \sim (x', y') \;:\Leftrightarrow\; x \leq x' \wedge y \leq y'.$$

1. Ist $\sim$ reflexiv?
2. Ist $\sim$ symmetrisch?
3. Ist $\sim$ antisymmetrisch?
4. Ist $\sim$ transitiv?
5. Wieviele minimale Elemente besitzt $\sim$?

Hier gelte $0 \notin \mathbb{N}$. Die Teilaufgaben 1–4 werden mit je einem Punkt bewertet, während die Teilaufgabe 5 mit zwei Punkten bewertet wird.