Diskrete Strukturen I

Abgabetermin für die Computeraufgaben: Dienstag, den 14. November 2000 (12.^{00} Uhr)
(Aufgabensteller: Ulrich Voll)

Tutoraufgabe 1

Sei G eine (endliche) Gruppe und U eine Untergruppe von G. Zwei Elemente $g_1, g_2 \in G$ seien äquivalent, $g_1 \sim_U g_2$, wenn $g_1(g_2)^{-1}$ in der Untergruppe U liegt. Die Äquivalenzklassen (oder auch Rechtsnebenklassen) bezeichnen wir mit $[g]_U$, oft schreibt man auch Ug. Die Menge der Rechtsnebenklassen bezeichnet man mit G/U.

a) Wieviele Rechtsnebenklassen gibt es, und wie groß sind sie jeweils?

b) Wir wollen jetzt eine Verknüpfung auf G/U festlegen, so daß diese Menge der Rechtsnebenklassen selbst wieder eine Gruppe wird. Naheliegend ist der Versuch $[g]_U[h]_U := [gh]_U$. Damit das aber eine vernünftige Abbildung ergibt, die tatsächlich nur von den Rechtsnebenklassen $([g]_U, [h]_U)$ abhängt, aber nicht von den speziell gewählten Repräsentanten (g, h), muß U eine bestimmte Bedingung erfüllen. Welche?

c) Betrachten Sie speziell die Permutationsgruppe S_3 einer dreielementigen Menge. Welche Untergruppen erfüllen die Bedingung aus b)?

d) Es gibt auch noch eine zweite Möglichkeit, eine Äquivalenz zu definieren, nämlich $g_1\ {}_U\!\sim g_2$, wenn $(g_1)^{-1}g_2$ in der Untergruppe liegt. Wenn die in b) gefundene Bedingung gilt, wird die Menge der Äquivalenzklassen wieder zu einer Gruppe. Berechnen Sie für die verschiedenen Untergruppen der S_3 die Rechts- und Linksnebenklassen und vergleichen Sie. Drücken Sie die Bedingung in b) mit Hilfe von Rechts- und Linksnebenklassen aus.

Tutoraufgabe 2

Wir betrachten Algebren mit einem zweistelligen Operator.

a) Gibt es Algebren, die nicht assoziativ sind? (Beweis!)

b) Gibt es Algebren, die kein Einselement (bzgl. des Operators) haben? (Beweis!)

c) Gegeben ein Homomorphismus $\Phi : G_1 \to G_2$ zwischen zwei Gruppen. Zeigen Sie, daß das Urbild des Einselements von G_2, also $\Phi^{-1}[e_2]$, zwangsläufig eine Gruppe ist. Zeigen Sie damit, daß die Menge aller $n \times n$-Matrizen mit reellen Einträgen und Determinante 1 zusammen mit der Matrixmultiplikation als Operator eine Gruppe bilden.

d) Sei A_3 die Untergruppe (warum?! Tip: Signum betrachten) der geraden Permutationen in S_3. Geben Sie einen Homomorphismus von der Gruppe A_3 in die Gruppe (s.o.) aller 2×2-Matrizen mit reellen Einträgen und Determinante 1. (Tip: Betrachten Sie geeignete Drehungen in der Ebene.)

Hinweis: *Die als freiwillig gekennzeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und sind für die Klausurzulassung ohne Bedeutung.*

Freiwillige Aufgabe 1

Man möchte oft aus bekannten Gruppen neue Gruppen konstruieren. Eine einfache Möglichkeit ist das (kartesische) Produkt, dort wird die Verknüpfung einfach komponentenweise auf das Produkt fortgesetzt.
Eine andere Möglichkeit ist das *semidirekte Produkt*, das von der Gruppe der Drehspiegelungen und Verschiebungen im affinen Raum motiviert ist, man denke etwa an die Ebene. Sei T eine Translation, man stelle sich jedes Element als einen Translationsvektor (im $\mathbb{R}^2$) vor, und sei R eine Drehspiegelung, man stelle sich jedes Element als eine 2×2-Matrix mit Determinante ± 1 vor.
Weiterhin müssen wir festlegen, wie die zweite Gruppe auf die erste 'wirkt', dies ist im genannten geometrischen Beispiel sehr naheliegend, da man die Verschiebungsvektoren auch 'verdrehen' kann. RT bezeichne also den um die Drehspiegelung R 'verdrehten' Verschiebungsvektor T.
Das semidirekte Produkt dieser beiden Gruppen besteht aus Paaren (T, R); geometrisch entspricht dies der Drehspiegelung mit R gefolgt von der Translation um T. Um die Verknüpfung zu definieren, betrachten Sie zunächst die links genannten Spezialfälle und begründen Sie damit die Verknüpfungsformel

$$\left.\begin{array}{c} (T,R) = (T,id)(0,R) \\ (0,R)(T,id) = (RT,R) \\ (T_1,id)(T_2,id) = (T_1+T_2,id) \\ (0,R_1)(0,R_2) = (0,R_1R_2) \end{array}\right\} \rightsquigarrow (T_2,R_2)(T_1,R_1) := (T_2 + R_2T_1, R_2R_1).$$

Zeigen Sie, daß dies eine Gruppenstruktur auf dem kartesischen Produkt der einzelnen Gruppen festlegt. Ist diese Gruppe kommutativ? (Begründung!)

Freiwillige Aufgabe 2

Betrachten Sie das Kinderspielzeug, in dem ein umrahmtes Quadrat mit 16 Feldern von 15 nummerierten Plättchen bedeckt ist, welche man vertikal und horizontal verschieben darf.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

15	14	13	12
11	10	9	8
7	6	5	4
3	2	1	

Zeigen Sie, daß man (mit erlaubten Spielzügen) die linke Konfiguration *nicht* in die rechte Konfiguration überführen kann. (Tip: Modellieren Sie die Konfigurationen wie auch die Spielzüge als Permutationen aus S_{16}. Muß man gerade oder ungerade viele Spielzüge machen, um von der linken Konfiguration zur rechten zu gelangen?)

Hinweise *zur Bearbeitung der Computeraufgaben finden Sie auf der Web-Seite zu den Übungen.*

Computeraufgabe 1 (15 Punkte)

Wir betrachten die Menge $\mathcal{A}$ der Folgen von natürlichen Zahlen der Länge $N \in \mathbb{N}$, deren Summe gleich $S \in \mathbb{N}$ ist.

1. Gibt es für jede Folge $a \in \mathcal{A}$ ein Element der Folge, dessen Wert mindestens X ist?
2. Gibt es für jede Folge $a \in \mathcal{A}$ zwei Elemente der Folge a, so dass deren Summe mindestens X ist? Anders formuliert: Gibt es Indizes $i_1 < i_2 \in [1 : N]$, so dass $a_{i_1} + a_{i_2} \geq X$?
3. Gibt es für jede Folge $a \in \mathcal{A}$ drei Elemente der Folge a, so dass deren Summe mindestens $X = (\lceil 3S/N \rceil)$ ist? Anders formuliert: Gibt es Indizes $i_1 < i_2 < i_3 \in [1 : N]$, so dass $a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i_3} \geq X$?

Die Werte für N, S und X werden vom Computer-Tool vorgegeben.

Computeraufgabe 2 (5 Punkte)

Nach einem Landgang kommen S angetrunkene Seeleute zurück an Bord. Dort verteilen sie sich wahllos auf die K Kojen. Aufgrund ihres Zustandes kümmert es sie wenig, ob diese bereits belegt sind oder nicht. Allerdings teilen sich nie mehr als 4 Seeleute eine Koje. Wie viele Kojen sind mindestens mit mehr als 2 Seeleuten belegt?

Die Werte für K und S werden vom Computer-Tool vorgegeben.