Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 2000/2001
Übungsblatt 5
14. November 2000

Diskrete Strukturen I

Abgabetermin für die Computeraufgaben: Dienstag, den 21. November 2000 (16.00 Uhr)
(Aufgabensteller: Klaus Holzapfel)

Tutoraufgabe 1

a) Zeichnen Sie den Permutationsgraphen für die Permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 7 & 1 & 2 & 10 & 9 & 4 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

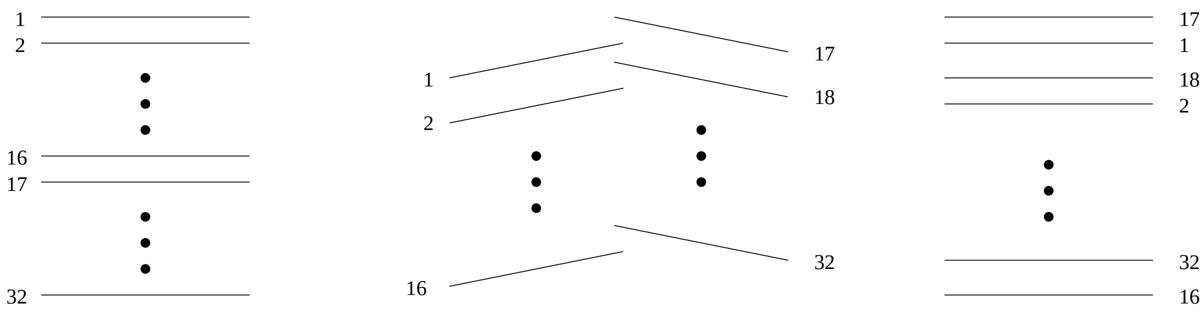
b) Berechnen Sie das Inverse der Permutation aus Teilaufgabe a).

c) Beweisen Sie, dass die Permutationsgruppe S_n durch die Transpositionen

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1} \qquad \text{mit } \tau_i = (i, i+1)$$

erzeugt wird.

d) Ein Kartenstapel mit 32 Karten soll wie folgt gemischt werden. Man teile den Stapel in zwei Stapel mit je 16 Karten und vermische beide Stapel, indem man abwechselnd eine Karte vom ersten und eine vom zweiten Stapel nimmt. Dabei soll die 16. Karte ganz unten zu liegen kommen (siehe Skizze).



Kann man durch häufiges Wiederholen dieses Mischvorgangs die ursprüngliche Reihenfolge wiederherstellen? Wenn ja, nach wie vielen Durchgängen ist dies der Fall?

Beschreiben Sie allgemein, wie viele Durchläufe für eine beliebige Mischvorschrift benötigt werden, um die ursprüngliche Reihenfolge der Karten wiederherzustellen. Geben Sie eine Vorschrift an, mit der man mehr Durchgänge benötigt als mit obigem Verfahren.

Tutoraufgabe 2

Beweisen Sie, dass eine Boolesche Algebra $A = \langle S, \oplus, \otimes, \sim, 0, 1\rangle$ folgende Eigenschaften besitzt. Dabei gibt atom(a) für $a \in S$ an, ob a ein Atom der Algebra ist oder nicht.

a) eindeutiges Inverses:

$$b \oplus c = 1 \wedge b \otimes c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = \sim b$$

b) De-Morgan-Regeln:

$$\begin{aligned} \sim (b \oplus c) &= \sim b \otimes \sim c \\ \sim (b \otimes c) &= \sim b \oplus \sim c \end{aligned}$$

c) elementare Eigenschaft von Atomen I:

$$\mathrm{atom}(a) \wedge \mathrm{atom}(b) \wedge a \neq b \quad \Rightarrow \quad a \otimes b = 0$$

d) elementare Eigenschaft von Atomen II:

$$\text{Falls } (\forall a \in S)[\mathrm{atom}(a) \Rightarrow a \otimes b = 0], \text{ dann } b = 0$$

Hinweis: *Die als freiwillig gekennzeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und sind für die Klausurzulassung ohne Bedeutung.*

Freiwillige Aufgabe 1

a) Zeigen Sie, dass in jeder Gruppe $G = (S, \circ)$ folgende Eigenschaft für die Inversenbildung gilt:

$$(\sigma \circ \tau)^{-1} = \tau^{-1} \circ \sigma^{-1}$$

b) Zeigen Sie, dass die Inversenbildung in Gruppen eindeutig ist.

c) Berechnen Sie folgende Verknüpfung von Permutationen in S_9, wobei $\circ$ für die Hintereinanderausführung steht, und geben Sie das Ergebnis in Zyklenschreibweise an:

$$(7,2,3,1)(4,5)(6,9,8) \circ (5,4,2,1)(3)(9,6,7,8) \circ ((2,5,3,8,6)(1,7,9)(4))^{-1}$$

d) Zeigen Sie, dass für eine Permutation π aus S_k das Signum sign(π) wie folgt berechnet werden kann:

$$\mathrm{sign}(\pi) = \prod_{1 \le i < j \le k} \frac{j-i}{\pi(j) - \pi(i)} = \prod_{1 \le i < j \le k} \frac{\pi(j) - \pi(i)}{j-i}$$

Hinweis: Der Wert von sign(π) ist 1, falls π aus einer geraden Anzahl von Transpositionen gebildet wird. Anderenfalls ist der Wert -1.

Freiwillige Aufgabe 2

Für eine endliche Gruppe $G = (S, \circ, 1)$ mit n Elementen sei für jedes Element $a \in S$ ein Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} \rho_a : G &\to G \\ x &\mapsto x \circ a \end{aligned}$$

definiert. Zeigen Sie, dass die Menge $T_G = \{\rho_a \; ; \; a \in S\}$ bezüglich der Hintereinanderausführung eine Transformationsgruppe bildet, und bringen Sie diese Gruppe in Beziehung zur Permutationsgruppe S_n.

Hinweise *zur Bearbeitung der Computeraufgaben finden Sie auf der Web-Seite zu den Übungen.*

Computeraufgabe 1 (8 Punkte)

a) Gegeben sei die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ und die Untergruppe $(k\mathbb{Z}, +)$ für verschiedene $k \in \mathbb{N}_0$. Betrachten Sie die Gruppe $\mathbb{Z}/(k\mathbb{Z})$. Wie viele (verschiedene) Untergruppen hat diese Gruppe?

b) Wie viele Zyklen hat die gegebene Permutation π?

c) Ist die gegebene Permutation π' gerade?

d) Betrachten Sie die gegebenen Permutation σ und σ'. Berechnen Sie das Ergebnis der Verknüpfung $\sigma \circ \sigma'$.

Computeraufgabe 2 (8 Punkte)

Sei r das Produkt von lauter verschiedenen Primzahlen, S die Menge der Teiler von r und ferner $\sim b = r/b$ für alle $b \in S$. Berechnen Sie folgende Ausdrücke in der Booleschen Algebra $\langle S, \texttt{Kgv}, \texttt{Ggt}, \sim, 1, r\rangle$:

a) $(a \oplus b) \oplus (c \otimes d)$

b) $(e \otimes f) \oplus (g \otimes h)$

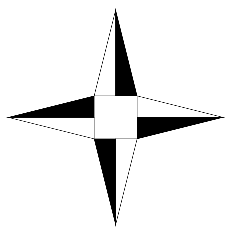
c) $\sim (i \otimes j)$

d) $(\sim (k \otimes l)) \otimes (m \otimes n)$

Computeraufgabe 3 (4 Punkte)

Geben Sie an, wie viele Elemente eine Transformationsgruppe maximal besitzt, die die folgenden geometrischen Strukturen auf sich selbst abbildet. Hierbei soll die Menge der zulässigen Transformationen auf Drehungen ($0° \leq \rho < 360°$) und Achsenspiegelungen beschränkt sein.

a) Ein regelmäßiger Stern der unten skizzierten Art mit m Ecken.



b) Ein regelmäßiges Vieleck mit n Ecken.