Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 2000/2001
Übungsblatt 6
21. November 2000

Diskrete Strukturen I

Abgabetermin für die Computeraufgaben: Dienstag, den 28. November 2000 (16.^{00} Uhr)
(Aufgabensteller: Martin Raab)

Tutoraufgabe 1

In dieser Übung soll der *Darstellungssatz für Boolesche Algebren* bewiesen werden:

> Sei $A = \langle S, \oplus, \otimes, \sim \rangle$ eine endliche Boolesche Algebra. Dann lässt sich jedes Element $x \in S$, $x \neq 0$ in eindeutiger Weise (bis auf die Reihenfolge) als $\oplus$-Summe von Atomen schreiben:
>
> $$x = \bigoplus_{a \in S,\ \mathrm{atom}(a),\ a \otimes x \neq 0} a.$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor[1]:

a) Zeigen Sie, dass $x \otimes \sim (\bigoplus a) = 0$ ist. Verwenden Sie dabei die in der letzten Tutorübung bewiesene elementare Eigenschaft von Atomen: Falls für alle Atome $a \in S$ gilt, dass $a \otimes b = 0$, dann ist $b = 0$.

b) Zeigen Sie, dass $x = \bigoplus a$ ist. Verwenden Sie dazu das Resultat aus Teil a) der Aufgabe und die in der Vorlesung bewiesene Eigenschaft, dass $x \otimes \bigoplus a = \bigoplus a$.

c) Zeigen Sie die Eindeutigkeit und verwenden Sie dabei die in der Vorlesung gegebene Beweisskizze.

d) Verwenden Sie den Darstellungssatz, um zu zeigen, dass die in der Vorlesung angegebene Abbildung zwischen einer endlichen Booleschen Algebra $A = \langle S, \oplus, \otimes, \sim \rangle$ mit n Atomen und der Potenzmengenalgebra $\mathcal{P}_n := \langle \mathcal{P}([n]), \cup, \cap, \overline{} \rangle$ ein Isomorphismus ist.

Tutoraufgabe 2

In der Vorlesung wurden die Möglichkeiten gezählt, n Bälle auf r Urnen zu verteilen. Zeigen Sie nun, dass es bei n nicht unterscheidbaren Bällen und r nicht unterscheidbaren Urnen genau

a) $\sum_{k=1}^{r} P_{n,k}$ Möglichkeiten gibt, die Bälle beliebig auf die Urnen zu verteilen,

b) 1 oder 0 Möglichkeiten gibt, die Bälle injektiv auf die Urnen zu verteilen (nach welchem Fall muss unterschieden werden?),

c) $P_{n,r}$ Möglichkeiten gibt, die Bälle surjektiv auf die Urnen zu verteilen, und

d) 1 Möglichkeit gibt, die Bälle bijektiv auf die Urnen zu verteilen.

[1] Der Übersichtlichkeit halber lassen wir im Folgenden die Indizes unter $\bigoplus$ und $\bigotimes$ weg, falls wie oben über die Atome $a \in S$ summiert wird, für die $a \otimes x \neq 0$ ist.

Hinweis: *Die als freiwillig gekennzeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und sind für die Klausurzulassung ohne Bedeutung.*

Freiwillige Aufgabe 1

Im Parlament eines Landes gibt es 151 Sitze und drei Parteien. Wie viele Möglichkeiten der Sitzverteilung gibt es, so dass keine Partei eine absolute Mehrheit hat? (Die Stimmzettel werden nicht gelocht...)

Freiwillige Aufgabe 2

Leiten Sie folgende Rekursion für die Partitionszahlen $P_{n,k}$ ab:

$$P_{n,1} = P_{n,n} = 1$$

und

$$P_{n,k} = P_{n-k,1} + P_{n-k,2} + \cdots + P_{n-k,k}.$$

Hinweise *zur Bearbeitung der Computeraufgaben finden Sie auf der Web-Seite zu den Übungen.*

Computeraufgabe 1

Bestimmen Sie den Koeffizienten von $w^{a_1}x^{a_2}y^{a_3}z^{a_4}$ in $(w+x+y+z)^n$, wobei $a_1+\cdots+a_4 = n$ ist.

Computeraufgabe 2

Wie viele verschiedene Wörter der Länge n kann man aus den Buchstaben des Wortes w bilden (wobei in w Buchstaben mehrmals vorkommen können)?

Computeraufgabe 3

Wie viele Wörter der Länge n können über dem Alphabet $\{0, 1\}$ gebildet werden, die ungerade viele Nullen enthalten?

Computeraufgabe 4

Wie viele k-elementige Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ gibt es, die keine zwei aufeinander folgenden Zahlen enthalten?

Computeraufgabe 5

Bestimmen Sie die Anzahl der durch a_1, a_2 oder a_3 teilbaren natürlichen Zahlen kleiner gleich n.